



UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS
TOURS

Ecole Doctorale : Santé, Sciences, Technologies

Année universitaire : 2003 / 2004

**THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOURS**

Discipline : Sciences De l'Ingénieur

présentée et soutenue publiquement

par :

Philippe LEDUC

Ingénieur INSA

Le 18 Mars 2004

**Caractérisation et modélisation prédictive
d'inductances spiralées intégrées**

Directeur de thèse : M. Didier MAGNON

JURY :

M. BAILLOU, J.	Professeur à l'Université de Tours	Examineur
M. CARBONÉRO, J.-L.	Docteur, STMicroelectronics Crolles	Examineur
M. CROS, D.	Professeur à l'Université de Limoges	Rapporteur
M. CROZAT, P.	Directeur de Recherche CNRS, I. E. F.	Rapporteur
M. GUITTON, F.	Docteur, STMicroelectronics Tours	Examineur
M. MAGNON, D.	Maître de conférences (HDR) à l'Université de Tours	Directeur de thèse
M. SCHELLMANN, A.	Maître de conférences à l'Université de Tours	Invité

"Ah ! Je ne sais pas comment ils font, ceux qui fument des cigarettes et qui se chatouillent béatement la barbe en travaillant. Oui, il y en a, paraît-il, pour lesquels la production est un plaisir facile, bon à prendre, bon à quitter, sans fièvre aucune. Ils sont ravis, ils s'admirent, ils ne peuvent écrire deux lignes qui ne soient pas deux lignes d'une qualité rare, distinguée, introuvable... Eh bien, moi, je m'accouche avec les fers, et l'enfant, quand même me semble une horreur. Est-il possible qu'on soit assez dépourvu de doute, pour croire en soi ? Cela me stupéfie de voir des gaillards qui nient furieusement les autres, perdre toute critique, tout bon sens, lorsqu'il s'agit de leurs enfants bâtards. Eh ! C'est toujours très laid, un livre ! Il faut ne pas en avoir fait la sale cuisine, pour l'aimer..."

E. Zola, "L'œuvre".

Remerciements

"J'adore les cacahuètes. Tu bois une bière et tu en as marre du goût. Alors tu manges des cacahuètes. Les cacahuètes c'est doux et salé, fort et tendre, comme une femme. Manger des cacahuètes, it's a really strong feeling. Et après tu as de nouveau envie de boire de la bière. Les cacahuètes, c'est le mouvement perpétuel à la portée de l'Homme."

Jean-Claude Van Varenberg.

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Microélectronique de Puissance (LMP) de l'Université François Rabelais de Tours et plus précisément dans l'équipe de recherche "Composants et Systèmes de Conversion d'Énergie" (COSYS). Cette thèse a été financée sous contrat industriel par l'entreprise STMicroelectronics.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Robert Jérésian, professeur à l'Université François Rabelais et directeur du LMP, ainsi qu'au professeur Jean Baillou, responsable du groupe COSYS, pour m'avoir chaleureusement accueilli dans leur équipe de recherche. Je remercie Monsieur Robert Pezzani, responsable du service "Design" de STMicroelectronics à Tours, pour m'avoir accordé sa confiance en m'intégrant au sein de son service.

Je remercie également Monsieur Didier Magnon, maître de conférences HDR à l'Université de Tours, pour avoir encadré ce travail et supporté, durant toutes ces années, mon indiscipline. Je souhaiterais exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs Fabrice Guitton et André Brémont, responsables industriels pour STMicroelectronics, pour leurs précieux conseils, leur disponibilité et les encouragements quotidiens.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Crozat, directeur de recherche CNRS à l'Institut d'Électronique Fondamentale (IEF) de l'Université d'Orsay, Monsieur Cros, professeur à l'Université de Limoges, pour avoir accepté d'examiner mon travail et d'en être les rapporteurs. Je suis très reconnaissant à Monsieur Carbonéro, ingénieur STMicroelectronics à Crolles, pour sa participation à mon jury de thèse. De nouveau, un grand merci à Jean Baillou pour sa constante bonne humeur, ses corrections détaillées tant sur le fond que sur la forme et enfin, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens ici à associer à mon travail Yoan Léger, qui aura vécu la douloureuse expérience d'être mon stagiaire. Dans un environnement de travail parfois difficile, il a montré de précoces aptitudes pour la recherche. Qu'il me pardonne mes excès... Une attention toute particulière à Benjamin Morillon, qui a relu ce manuscrit en néophyte éclairé et à Monsieur Leduc père, à qui est incombée la tâche ingrate d'éradiquer mes dérives orthographiques.

Les remerciements d'usage (mais sincères) étant faits, je peux désormais m'exprimer de manière un peu plus personnelle. Cette partie est souvent ce qu'il y a de plus intéressant à lire dans une thèse, et celle-ci ne fait pas exception. Il s'agit donc de ne pas se loupier ! Mes premiers mots

iront évidemment à tous les copains du labo, aux vieux comme aux nouveaux, avec qui j'ai partagé tant de bons moments en journée comme en soirée. Il est difficile de traduire sur le papier l'excellente ambiance ayant régné au sein de notre groupe durant ces quelques années de sacerdoce. Peut-être cette grandiose citation que vous avez pu lire en tête de chapitre, aphorisme d'un philosophe méconnu, vous éclairera-t-elle. Quoique moqué par les sphères intellectuelles, ce penseur aux multiples talents sera, j'en suis sûr, porté aux nues dans quelques siècles...

Une petite dédicace à chacun d'entres vous, chers collègues... Et dans le désordre, comme d'habitude : Xtof Ortiz (*t'avais raison, "the Matrix has me"*), Franck Galtié (*Tou po vénir do minoutes ?*), Fabrice Roqueta (*L'Hélium, ça fait des bulles ! Et l'Hydrogène ? Ben, ça fait des bulles aussi*), Romain Ferragut (*Ah ! Min Roml... Ma cigale électronique, comment as-tu pu laver ma tasse ? Trois ans de boulot effacés d'un coup d'éponge*), Ghafour Benabdelaziz (*Le contrat de confiance...*), Fred Cayrel (*Enfin Fred, qu'est-ce que t'essaies de me dire à la fin ?*), Céline Bondoux (*Non, ne rougis pas, non, ne rougis pas...*), Christophe Mauriac (*La Réole, c'est vraiment dans le Bordelais ?*), Brahim Belgacem (*N'aura nin d'pi-pi, n'aura nin d'pinard ! C'est quoi la suite déjà ?*), Wilfried Vervisch (*OK Wilfried, si on a des médailles aux JO d'hiver, c'est grâce aux Marseillais ! Tu me manqueras...*), Gaël Gautier (*Si, j'te promets, c'est pas fléché*), Emilien Bouyssou (*Faut pas confondre un diélectrique et un isolant, voyons !*), Sylvain Nizou (*Mon pote de binouze, mon pote tout court*), Stéphane Moreau (*J'ai fait une course le week-end dernier : 4000 mètres de dénivelé, trois fois rien...*), Gweltaz Gaudin (*Super-Rondoudou : tellement puissant... Qu'il peut s'endormir lui-même !*), Sébastien Kouassi (*Vrukte heine tajen der kafir*), Sébastien Desplobain (*Le passe Liber-t, rapidité simplicité et confort du voyage*), Edgar Jeanne (*Avec ça, je te détecte un camion à 100 mètres. C'est tout d'ailleurs*) et Nourdin Yaakoubi (*Faire tenir la Sagrada Familia sur un cheveu, c'est pas donné à tout le monde !*). La liste ne serait pas complète sans citer les maîtres de conférences, les "permanents" comme on dit là-bas, qui ont eu la lourde tâche de cadrer l'impétueuse jeunesse : Daniel Alquier (*La fille du bédouin, huumm...*), Laurent Ventura (*La rigueur incarnée*), Yves Raingeaud (*Dis-moi, la course à pied, tu reprends quand ?*), Ambroise Schellmanns (*Ton calepin, Boise, est plus raturé qu'une copie de méca Q !*) et Jean-Charles Lebunetel (*Lé Bounty*). Beaucoup de bonheur et de réussite à vous tous !

Pour conclure, je ne remercie pas un certain Docteur Watson, il aura coûté la vie à quelques souris. Paix à leurs âmes...

Table des matières

Introduction

1. Les composants passifs Radio-Fréquences.....	3
2. Les circuits intégrés hybrides.....	5
3. Modélisation d'inductances spiralées.....	5
4. Plan du manuscrit.....	6
Références bibliographiques.....	8

Chapitre 1 : Développement d'un banc de mesures hyperfréquences

1. Introduction.....	11
2. Description du banc de mesures.....	12
2.1. L'analyseur de réseau vectoriel.....	12
2.2. Les sondes de mesures hyperfréquences.....	13
3. Calibrage du banc de mesures.....	14
3.1. Les sources d'erreurs.....	14
3.1.1. Les erreurs systématiques.....	14
3.1.2. Les erreurs aléatoires.....	15
3.2. Les méthodes de calibrage.....	16
3.2.1. La méthode TRL.....	17
3.2.2. La méthode SOLT.....	18
4. Les méthodes de compensation.....	19
4.1. Introduction.....	19
4.2. Présentation des différentes méthodes.....	21
4.2.1. La méthode des paramètres Y.....	21
4.2.2. La méthode des paramètres YZ.....	22
4.2.3. La méthode "trois étapes".....	24
4.2.4. La méthode des lignes.....	25
4.2.4.1. Caractérisation des lignes d'accès.....	27
4.2.4.2. Caractérisation des contacts.....	29
4.3. Définition d'un outil de comparaison.....	30
4.4. Validation de la méthode des lignes.....	32
4.4.1. Contrôle de l'extraction de Z_c et γ	32
4.4.2. Pertinence de la compensation YZ.....	34
4.4.3. Précision de la caractérisation des accès.....	37

4.4.4. Comparaison à un étalon : le circuit ouvert	39
4.5. Estimation de la précision des mesures	42
4.5.1. Incertitudes liées au calibrage	42
4.5.2. Sensibilité des méthodes de compensation	44
4.6. Comparaison des méthodes de compensation	46
5. Conclusion	48
Références bibliographiques	50

Chapitre 2 : Modélisation comportementale

1. Introduction	57
2. Les inductances intégrées	58
2.1. Réalisation technologique	58
2.2. Paramètres géométriques du modèle	59
3. La modélisation d'inductances spiralées	60
3.1. Les simulateurs électromagnétiques	60
3.2. Les modèles électriques segmentés	61
3.3. Les modèles électriques compacts	62
4. Structure du modèle comportemental	64
4.1. Représentation de la composante résistive	64
4.2. Représentation de la composante inductive	67
5. Corrélation à la géométrie	69
5.1. Expression analytique de R_{dc}	69
5.2. Expression analytique de R_{ep}	69
5.3. Expression analytique de L_{ac}	71
5.3.1. Modélisation du pont et des accès	72
5.3.2. Modélisation de la spirale	72
5.3.2.1. Modèles existants	72
5.3.2.2. Evaluation des modèles existants	73
5.3.2.3. Modèle développé	75
5.3.2.4. Validation du modèle développé	76
5.4. Expression analytique de L_{ep}	77
6. Confrontation à la mesure	78
7. Conclusion	80
Références bibliographiques	81

Chapitre 3 : Modélisation d'inductances par la méthode PEEC

1. Introduction	87
2. Méthodes numériques	88
2.1. La méthode des différences finies.....	89
2.2. La méthode des éléments finis	90
2.3. La méthode des moments.....	91
3. La méthode PEEC	92
3.1. Etablissement de l'équation intégrale.....	92
3.1.1. <i>Equations de propagation et leurs solutions</i>	<i>92</i>
3.1.2. <i>Régime quasi stationnaire</i>	<i>94</i>
3.1.3. <i>Limitations de la méthode PEEC.....</i>	<i>96</i>
3.1.3.1. Courants induits dans le substrat.....	97
3.1.3.2. Effets de capacité	98
3.2. Résolution de l'équation intégrale.....	98
3.2.1. <i>Discrétisation de l'équation intégrale</i>	<i>98</i>
3.2.2. <i>Formalisme électrique</i>	<i>100</i>
3.3. Application de la méthode PEEC.....	103
3.3.1. <i>Cas des lignes de transmission</i>	<i>104</i>
3.3.1.1. Le plan de masse coplanaire	105
3.3.1.2. Résistance partielle	106
3.3.1.3. Inductance mutuelle partielle	106
3.3.1.4. Inductance propre partielle.....	107
3.3.2. <i>Cas des inductances.....</i>	<i>108</i>
3.3.2.1. Boucles circulaires concentriques	110
3.3.2.2. Plan de masse coplanaire	111
3.3.2.3. Calcul des éléments de la matrice impédance.....	112
3.3.2.4. Calcul de N_{ik} , approximation de Simpson.....	115
3.3.2.5. Calcul de L_{ik} , approximation de Lyle.....	121
3.3.2.6. Calcul de l'inductance propre	124
3.4. Calcul de l'impédance équivalente.....	125
3.4.1. <i>Maillage des conducteurs</i>	<i>126</i>
3.4.2. <i>Assemblage des conducteurs</i>	<i>134</i>
3.4.3. <i>Inversion de la matrice impédance.....</i>	<i>138</i>
4. Validation du simulateur	144
4.1. Lignes de transmission	144
4.2. Qualité de l'approximation de Simpson	145
4.3. Confrontation à l'expérience	148

4.3.1. Etude statistique.....	148
4.3.2. Etude de cas.....	150
5. Conclusion.....	154
Références bibliographiques	157
 Chapitre 4 : Synthèse de modèles électriques paramétrés	
1. Introduction.....	167
2. Modèle expérimental.....	168
2.1. Introduction.....	168
2.2. L'analyse de régression	170
2.2.1. La méthode des moindres carrés	170
2.2.2. Décomposition en valeurs singulières	171
2.3. Structure de la modélisation	173
2.3.1. Fonction de transfert.....	173
2.3.1.1. Modélisation de l'impédance	173
2.3.1.2. Application de la méthode.....	175
2.3.2. Fonction "puissance".....	176
2.3.2.1. Modélisation de la composante résistive.....	177
2.3.2.2. Modélisation de la composante inductive	178
2.3.2.3. Application de la méthode.....	179
2.4. Génération d'un modèle comportemental.....	180
2.4.1. Contexte de l'étude	181
2.4.2. Evaluation des modèles retenus.....	183
2.4.3. Sensibilité de l'extraction	186
2.4.3.1. Intervalle de confiance	187
2.4.3.2. Affinage du modèle.....	191
3. Génération d'un modèle paramétré	194
3.1. Modèle polynomial.....	195
3.2. Les plans d'expériences	196
3.2.1. Choix du type de plan	197
3.2.2. Algorithmes de construction du plan	197
3.2.2.1. Algorithme de Galil-Kiefer	198
3.2.2.2. Algorithme de Johnson-Nachtsheim	198
3.2.3. Considérations statistiques	199
4. Application et résultats	199
4.1. Processus de modélisation	199

4.2. Modèles obtenus.....	202
4.2.1. <i>Comparaison à la simulation.....</i>	203
4.2.1.1. Le modèle Wheeler 2	203
4.2.1.2. Le modèle Wheeler 2 affiné.....	207
4.2.1.3. Le modèle Rationnelle 2	209
4.2.2. <i>Aptitude à la prédiction</i>	212
4.2.2.1. Simulations aléatoires	212
4.2.2.2. Confrontation à la mesure	214
5. Conclusion.....	218
Références bibliographiques.....	220

Conclusion

1. Bilan des travaux	227
2. Perspectives	229
Références bibliographiques.....	231

Annexe : Résistance d'un ruban conducteur

1. Introduction	235
2. L'équation de diffusion	235
3. Calcul de la résistance équivalente	238

Introduction

"Quiconque différera l'exécution d'un édit impérial sera puni de cinquante coups de bambou. Pour tout jour de délai supplémentaire, la peine sera graduellement aggravée, jusqu'à concurrence de cent coups."

Ta T'sing Leu Lee, Code pénal chinois.

L'empire de Chine s'est maintenu durant près de quatre mille ans et a rayonné à travers le monde par le raffinement de sa civilisation. Le système politique chinois s'articulait autour d'un seul homme, l'empereur. Depuis sa capitale Pékin, le fils du ciel régnait sur un empire s'étalant, du nord au sud, de la Mandchourie à la mer de Chine et, d'est en ouest, des contreforts de l'Himalaya à la mer Jaune. Il s'est appuyé pour cela sur un réseau routier et fluvial ramifié, une administration rigoureuse – la bureaucratie céleste – l'avisant de l'état de ses provinces par l'intermédiaire de coursiers à cheval. Ne souffrant aucun retard, il obtenait en quelques jours des informations provenant de n'importe quel point de son empire, gage d'une réactivité bien longtemps sans égal. Cet exemple n'est pas unique dans l'Histoire de l'humanité, et nous aurions tout aussi bien pu évoquer le cas de la Perse, de l'Égypte ou de Rome.

Longtemps réservé aux seuls puissants, l'accès à l'information s'est considérablement démocratisé au cours du siècle dernier grâce au développement de moyens de communication efficaces. Les échanges de toute nature ont connu une croissance exponentielle, et l'on n'en mesure pas encore aujourd'hui toutes les conséquences, qu'elles soient économiques ou sociales. Cette mutation est toujours en cours, et l'on ambitionne par exemple à présent de fondre les concepts de téléphonie mobile et de réseau informatique dans le but de prodiguer à chaque individu, par l'intermédiaire de terminaux portables, un accès direct et quasi-instantané à un réseau global – Internet. Certaines études statistiques prévoient ainsi que, d'ici 2010, le nombre de personnes possédant un téléphone portable devrait dépasser 2,2 milliards, ce qui représente environ un tiers de la population mondiale [1]. De plus, 75 % d'entre eux seront consommateurs de données dites "mobiles". Le corollaire industriel est un formidable essor du secteur des télécommunications en général, et des applications portables en particulier.

1. Les composants passifs Radio-Fréquences

Les systèmes de communication travaillent à des fréquences de plus en plus élevées, et nombre d'applications portables se partagent aujourd'hui le domaine des Radio-Fréquences (RF). La raison la plus évidente est que la largeur de la bande fréquentielle de transmission et donc le débit d'informations transférables augmente avec la fréquence d'opération. D'autre part, la longueur d'onde en espace libre étant de l'ordre du centimètre, il est possible de réaliser des antennes portables efficaces et de dimensions raisonnables. L'argument suivant concerne les éléments dits passifs qui, rappelons-le, sont définis comme des composants électroniques pouvant uniquement consommer ou stocker de l'énergie. Cette vaste famille regroupe entre autres les résistances, les capacités, les lignes, les inductances et les transformateurs. Les composants passifs impliqués dans les circuits RF sont de faibles valeurs. Par exemple, un oscillateur contrôlé en

tension nécessite typiquement, à 100 MHz, une inductance de "choke" de l'ordre de 100 nH alors qu'elle ne vaut plus qu'environ 1 nH à 10 GHz. Ces composants sont en conséquence suffisamment petits pour être directement intégrés sur puce, occasionnant par là même une diminution drastique de la taille globale des circuits.

Le marché des télécommunications est aujourd'hui demandeur de circuits RF de faibles dimensions, la miniaturisation s'accompagnant en effet de nombreux avantages. Une étape d'intégration conduit en général à une réduction des coûts de production, principalement liée à la forte réduction des coûts d'assemblage. Outre l'impérieux argument économique, la miniaturisation permet d'augmenter le nombre de fonctionnalités que l'on peut implémenter dans un encombrement donné. Les passifs discrets occupent en effet actuellement une grande partie de la surface de la carte électronique. L'intégration améliore également les caractéristiques électriques en limitant l'introduction de parasites d'interconnexion. Elle renforce la fiabilité et la robustesse du produit final en réduisant le nombre d'interfaces mécaniques et électriques (comme les soudures par exemple). Enfin, elle diminue la consommation globale du circuit. Tous ces atouts sont évidemment de la plus haute importance dans un marché pour lequel la portabilité et l'autonomie sont deux qualités essentielles. Ainsi, les composants passifs, qui jusque là ont joué un rôle mineur dans l'industrie microélectronique, se trouvent être aujourd'hui au centre de tous les intérêts.

S'il est clair qu'un énorme travail a été réalisé afin de diminuer la taille des composants actifs, les recherches sur les composants passifs intégrés sont à l'inverse restées jusque récemment relativement marginales, sans doute parce que cette étape technologique ne s'imposait pas auparavant. Ainsi, la plupart des réalisations électroniques utilisent des éléments passifs discrets montés en surface (CMS), ces derniers étant connectés à la puce par l'intermédiaire de pistes imprimées sur le support. De nombreux problèmes apparaissent cependant dans le domaine RF, car les parasites introduits par les divers éléments de connexion deviennent non négligeables devant les caractéristiques des éléments passifs. Une alternative à l'intégration pourrait être la simulation du comportement de composants passifs à l'aide d'éléments actifs, à laquelle ont souvent recours les concepteurs de circuits intégrés. Cependant, un bruit excessif ainsi qu'une bande fréquentielle d'opération limitée, qui sont inhérents à cette solution, en réduisent considérablement l'intérêt. De plus, l'introduction de composants actifs supplémentaires induit une consommation d'énergie plus importante, ce qui limite ensuite l'autonomie du produit final. L'intégration des passifs est donc non seulement désirable mais nécessaire.

2. Les circuits intégrés hybrides

L'approche monolithique qui consiste à intégrer directement les composants passifs sur le substrat en silicium est délicate. Le silicium, semi-conducteur, peut en effet présenter une conductivité élevée, ce qui le rend *a priori* sensible au champ électromagnétique créé par les charges en déplacement dans les métallisations. Les courants induits dans le substrat par le champ génèrent des pertes, ce qui se traduit par une dégradation des performances électriques. Le problème devient critique dans le cas des inductances car ce composant offre une surface au substrat relativement importante. Ainsi, le coefficient de qualité d'une inductance déposée sur silicium excède difficilement quinze. Les inductances spiralées sont souvent impliquées en électronique RF dans les blocs d'adaptation, qui permettent de maximiser le transfert de puissance entre deux fonctions d'un circuit. On peut également les trouver dans les filtres et en particulier dans les résonateurs [2], les coupleurs, les amplificateurs accordables [3], les oscillateurs [4]. Toutes ces applications requièrent, autant que possible, des inductances à faibles pertes, et plusieurs astuces technologiques ont en conséquence été développées afin de limiter l'effet du substrat. Une première approche s'inspire directement du feuilletage du noyau d'un transformateur. Le substrat est divisé par dopage en caissons isolés [5,6,7], ce qui permet de diminuer les courants de Foucault et donc, par voie de conséquence, les pertes. Un autre procédé consiste à graver le substrat sous l'inductance [8,9]. Celle-ci est alors suspendue dans l'air, diélectrique aux propriétés beaucoup plus favorables.

Si ces techniques conduisent à une amélioration significative des performances des inductances, elles ne concurrencent cependant pas encore les solutions mixtes, pour lesquelles les coefficients de qualité atteignent des valeurs supérieures à 50. Les composants passifs sont réalisés sur un substrat distinct présentant de faibles pertes, comme le quartz, l'ensemble étant ensuite assemblé avec la composante active du circuit. Combiner circuits intégrés silicium et Radio-Fréquences dans un module compact (technologie "Multi Chip Module") semble être la tendance industrielle actuelle dans le développement des applications portables. La portée d'une telle innovation est énorme puisqu'elle concerne des appareils électroniques d'utilisation courante : les pagers, les téléphones mobiles, ou encore les systèmes de navigation GPS ("Global Positioning System") qui opèrent tous dans le domaine RF.

3. Modélisation d'inductances spiralées

Du fait de leurs dimensions réduites (microniques), les composants intégrés Radio-Fréquences sont le siège de phénomènes électromagnétiques complexes conduisant à des réponses électriques souvent éloignées des caractéristiques idéales, et donc difficiles à prévoir. L'utilisation de composants discrets lors du développement d'un circuit autorise *a posteriori* une éventuelle

phase d'ajustement, ce que par contre ne permet pas la solution intégrée. Il est en conséquence primordial, afin d'anticiper les problèmes de conception et proposer rapidement un produit répondant aux spécifications, de pouvoir prédire précisément le comportement d'un grand nombre de passifs en fonction de leurs caractéristiques, et ce sur un domaine de fréquences aussi large que possible.

Une bibliothèque exhaustive de modèles décrivant dans la bande RF le comportement électrique de composants passifs intégrés est aujourd'hui essentielle à la simulation de circuits complexes. Cette base de données devra, à terme, être à même de fournir rapidement un modèle, condition indispensable à l'optimisation, pour chacune des briques élémentaires utilisées en électronique RF : les inductances, les résistances, les capacités, les lignes de transmission, les transformateurs, les coupleurs... Il s'agit là d'un projet très vaste et nous nous cantonnerons, pour notre part, à l'étude d'une seule famille : les inductances spiralées. Celle-ci sera menée sur la plage de fréquences [0, 6] GHz.

4. Plan du manuscrit

Nous pouvons distinguer trois grandes parties dans ce travail. Le premier chapitre, expérimental, porte sur le développement d'un banc de mesures hyperfréquences opérant de 30 kHz à 6 GHz et met en particulier l'accent sur les problèmes spécifiques à la métrologie RF. De nombreux parasites sont en effet introduits par l'environnement de mesure et nécessitent la mise en place de techniques de correction élaborées. Celles-ci seront analysées en détail au cours de ce chapitre, puis discutées afin de dégager une procédure efficace de compensation des diverses sources d'erreurs.

Le travail de modélisation proprement dit a pour objet la synthèse de modèles électriques "paramétrés", permettant l'obtention rapide de la réponse fréquentielle d'une inductance spiralée, à partir de la seule connaissance de ses caractéristiques géométriques. Le second chapitre se veut introductif et présente la structure du modèle retenu, un circuit électrique à constantes localisées. Le modèle empirique est obtenu en deux phases distinctes que nous décrirons. Les différents paramètres du circuit équivalent sont tout d'abord renseignés d'après la mesure à l'aide d'algorithmes d'optimisation. Ils doivent ensuite être explicitement reliés aux spécifications du composant étudié. L'extraction paramétrique est en conséquence réalisée sur un ensemble de mesures, ce qui permet une corrélation à la géométrie par l'ajustage de fonctions analytiques issues de la littérature.

La complexité des phénomènes électromagnétiques impliqués se traduit électriquement par une grande variété de réponses possibles. Ainsi, il a été nécessaire de simplifier le problème lors de la modélisation comportementale et l'approche expérimentale n'autorise, au final, qu'un nombre limité de paramètres géométriques variables. Ceci nous a poussés à développer un outil de simulation numérique, sujet du chapitre 3, calculant pour l'instant l'impédance de transmission d'une inductance spiralée. Il est basé sur la méthode PEEC ("Partial Element Equivalent Circuit"), particulièrement adaptée aux structures planaires. Nous en rappellerons les grands principes, pour ensuite l'appliquer au cas de l'inductance, composant à géométrie quasi-circulaire. Le simulateur obtenu est numériquement efficace et permet, en outre, la prise en compte simple d'un plan de masse coplanaire. Il constitue, dans ce cas précis, une alternative intéressante aux simulateurs électromagnétiques 3D disponibles dans le commerce.

Enfin, nous présenterons dans le dernier chapitre un procédé original de génération d'un modèle analytique à partir de simulations numériques ou de mesures expérimentales. S'inscrivant dans un cadre théorique rigoureux, la méthode proposée établit un lien solide entre l'ensemble de modèles discrets et le modèle continu paramétré. Elle offre ainsi une solution aux problématiques rencontrées au chapitre 2. Cette procédure fait appel à de nombreux concepts mathématiques, dont la théorie des plans d'expériences que nous exposerons plus en détail.

Références

- [1] *Telecompetition Worldwide Mobility Report : 2003*, Telecompetition Incorporation, August 2003, pp. 21 – 27.
- [2] **N. Nguyen, R. Meyer**, "Si IC-Compatible Inductors and LC Passive Filters", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 25, n° 4, August 1990, pp. 1028 – 1030.
- [3] **N. Nguyen, R. Meyer**, "A Silicon Bipolar Monolithic RF Bandpass Amplifier", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 27, n° 1, January 1992, pp. 123 – 127.
- [4] **N. Nguyen, R. Meyer**, "A 1.8 GHz Monolithic LC Voltage-Controlled Oscillator", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 27, n° 3, March 1992, pp. 444 – 450.
- [5] **C. Yue, S. Wong**, "On-Chip Spiral Inductors with Patterned Ground Shields for Si-Based RF ICs", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 33, n° 5, May 1998, pp. 743 – 752.
- [6] **F. Mernyei, F. Darrer, M. Pardoen, A. Sibrai**, "Reducing the Substrate Losses of RF Integrated Inductors", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 8, n° 9, September 1998, pp. 300 – 301.
- [7] **Y. Emery Chen, D. Bien, D. Heo, J. Laskar**, "Q-Enhancement of Spiral Inductor with N⁺-Diffusion Patterned Ground Shields", *IEEE Microwave Theory and Techniques Symposium Digest*, 2001, pp. 1289 – 1292.
- [8] **J. Chang, A. Abidi, M. Gaitan**, "Large Suspended Inductors on Silicon and Their Use in a 2- μ m CMOS Amplifier", *IEEE Electron Devices Letters*, Vol. 14, n° 3, May 1993, pp. 246 – 248.
- [9] **H. Lakdawala, X. Zhu, H. Luo, S. Santhanam, L. Richard Carley, G. Fedder**, "Micromachined High-Q Inductors in a 0.18- μ m Copper Interconnect Low-K Dielectric CMOS process", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 37, n° 3, March 2002, pp. 394 – 402.

Chapitre 1 :

Développement d'un banc de mesures hyperfréquences

"Que toute connaissance commence avec l'expérience, cela ne fait aucun doute. En effet, par quoi notre pouvoir de connaître pourrait-il être éveillé et mis en action, si ce n'est par des objets qui frappent nos sens et qui, d'une part, produisent par eux-mêmes des représentations et d'autre part mettent en mouvement notre faculté intellectuelle, afin qu'elle compare, lie ou sépare ces représentations, et travaille ainsi la matière brute des impressions sensibles pour en tirer une connaissance des objets, celle qu'on nomme expérience ? Ainsi, chronologiquement, aucune connaissance ne précède en nous l'expérience et c'est avec elle que toutes commencent."

E. Kant, "Critique de la raison pure", Introduction.

1. Introduction	11
2. Description du banc de mesures	12
2.1. L'analyseur de réseau vectoriel	12
2.2. Les sondes de mesures hyperfréquences.....	13
3. Calibrage du banc de mesures	14
3.1. Les sources d'erreurs.....	14
3.1.1. Les erreurs systématiques	14
3.1.2. Les erreurs aléatoires	15
3.2. Les méthodes de calibrage	16
3.2.1. La méthode TRL.....	17
3.2.2. La méthode SOLT	18
4. Les méthodes de compensation	19
4.1. Introduction.....	19
4.2. Présentation des différentes méthodes	21
4.2.1. La méthode des paramètres Y	21
4.2.2. La méthode des paramètres YZ	22
4.2.3. La méthode "trois étapes".....	24
4.2.4. La méthode des lignes.....	25
4.2.4.1 Caractérisation des lignes d'accès	27
4.2.4.2 Caractérisation des contacts.....	29
4.3. Définition d'un outil de comparaison.....	30
4.4. Validation de la méthode des lignes	32
4.4.1. Contrôle de l'extraction de Z_c et γ	32
4.4.2. Pertinence de la compensation YZ	34
4.4.3. Précision de la caractérisation des accès.....	37
4.4.4. Comparaison à un étalon : le circuit ouvert.....	39
4.5. Estimation de la précision des mesures.....	42
4.5.1. Incertitudes liées au calibrage.....	42
4.5.2. Sensibilité des méthodes de compensation.....	44
4.6. Comparaison des méthodes de compensation	46
5. Conclusion.....	48

1. Introduction

La caractérisation d'éléments passifs dans le domaine des hyperfréquences nécessite un appareillage complexe que nous allons décrire très brièvement dans ce chapitre, en nous focalisant sur l'analyseur de réseau vectoriel qui permet la mesure des paramètres de dispersion (paramètres S). Malgré toutes les précautions prises par les constructeurs, la chaîne des éléments impliqués dans le processus de mesure est suffisamment complexe pour être à l'origine de nombreuses erreurs, qu'il conviendra d'identifier, ce qui limite de prime abord la précision d'un système de mesure fréquentiel.

Une partie de ces erreurs peut être corrigée et cette étape constitue ce que l'on appelle communément le calibrage. Les méthodes de calibrage, fort nombreuses, font toutes appel à la mesure de standards aux caractéristiques connues et se distinguent essentiellement par le choix des étalons. Nous discuterons les avantages et inconvénients des deux principales méthodes de calibrage utilisées en hyperfréquence, à savoir la méthode TRL ("Thru Reflect Line") et la méthode SOLT ("Short Open Load Thru"), et justifierons le choix de cette dernière.

L'implantation directement sur tranche de motifs étalons étant techniquement ardue, les méthodes de calibrage ne permettent pas *a priori* la correction des erreurs introduites par le motif de mesure lui-même, dont la réponse électrique ne peut être négligée aux fréquences d'intérêt. Une correction supplémentaire est nécessaire, et diverses techniques, dites de compensation, ont été développées afin de représenter au mieux l'environnement de mesure. Elles nécessitent des structures de test qui consomment une place importante de la plaquette au détriment de la surface utile c'est-à-dire allouée à la fabrication de composants passifs. Après avoir décrit les avantages et inconvénients des principales méthodes nous tenterons, et cela constituera la teneur de ce chapitre, de déterminer une méthode de compensation qui pourrait être qualifiée de nécessaire et suffisante au sens où elle réalise un bon compromis entre précision et nombre de motifs impliqués. La validation de cette méthode nécessite la mise en place de procédures de test complexes, abordées en détail. Ce processus de validation permet de plus une réelle sensibilisation aux problématiques inhérentes à la modélisation d'un motif de mesure. Il en découle, entre autres, une estimation de l'incertitude expérimentale finale, c'est-à-dire postérieure à l'étape de compensation.

2. Description du banc de mesures

2.1. L'analyseur de réseau vectoriel

L'énergie électrique haute fréquence peut être comparée à une onde lumineuse. Elle est soit réfléchi, soit transmise par le dispositif sous test qui se comporte comme une lentille. Par la mesure du rapport des amplitudes et des différences de phase entre le signal incident et les signaux dérivés, il est possible de déterminer les paramètres de dispersion du système, d'où découlent les grandeurs électriques caractéristiques. Ces mesures, dites réflectométriques, sont réalisées à l'aide d'un analyseur de réseau. La Figure 1 donne le schéma de principe de l'analyseur de réseau vectoriel HP 8753E [1], que nous utilisons pour réaliser nos mesures, et nous rappelons très succinctement la fonction de ses principaux éléments constitutifs.

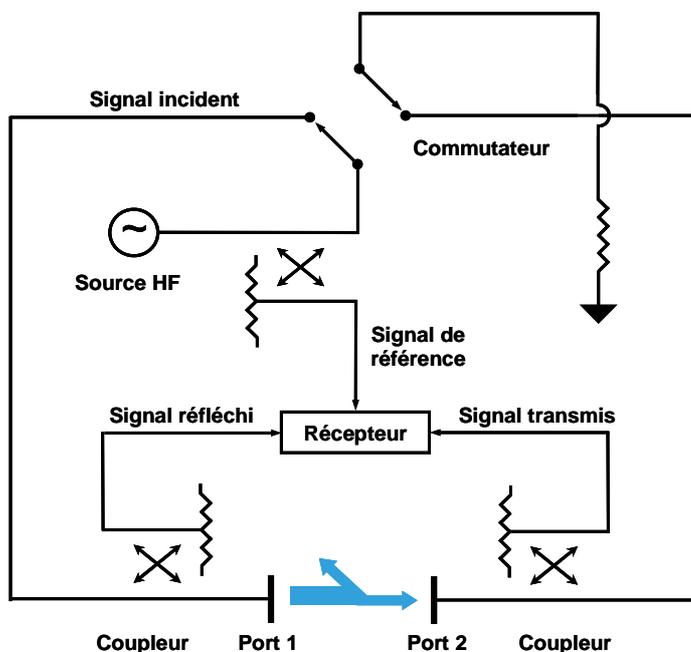


Figure 1 : Diagramme synoptique de l'analyseur de réseau.

Un analyseur de réseau dispose d'une source HF afin de générer le signal d'excitation. Des coupleurs directifs séparent les signaux incidents, transmis et réfléchis de telle sorte que leurs amplitudes respectives et leurs différences de phase puissent être mesurées. La mesure en elle-même est réalisée indirectement grâce à un récepteur accordé à faible bruit. Il convertit dans un premier temps les signaux en basse fréquence. La chaîne de détection en aval fonctionne ainsi à fréquence fixe, ce qui simplifie grandement sa réalisation. Enfin, le récepteur de l'analyseur de réseau HP 8753E ne disposant que de trois canaux, un commutateur permet d'inverser le sens de circulation du signal incident sans déconnecter le dispositif sous test.

2.2. Les sondes de mesures hyperfréquences

La mesure hyperfréquence sur tranche se distingue de la mesure de dispositifs en boîtier par la nécessité d'utiliser des sondes, éléments qui constituent le dernier maillon de la chaîne reliant l'appareil de mesure à la plaquette. Celle-ci est fixe et repose sur un support isolant. Les sondes, souvent appelées "pointes", sont mobiles et leur déplacement est assuré par une station de test semi-automatique, ce qui permet d'améliorer la reproductibilité des mesures. Il existe différents types de sondes dont une description précise des principes de fonctionnement et des performances dépasserait largement le cadre de cette étude. Nous invitons le lecteur intéressé à consulter les références ci-après pour de plus amples détails [2,3,4]. De nombreux travaux [5] ont été menés afin de déterminer quel type de sondes satisfait au mieux les contraintes spécifiques imposées par la mesure sur tranche, à savoir : une bonne résistance mécanique, une relative insensibilité à l'encrassement ainsi qu'aux défauts de planéité de la plaquette. Il semble désormais établi que les sondes coplanaires à air donnent les meilleurs résultats [6]. Nous avons donc porté notre choix sur des pointes ACP 40 (voir la Figure 2) développées par la société Cascade Microtech [7].

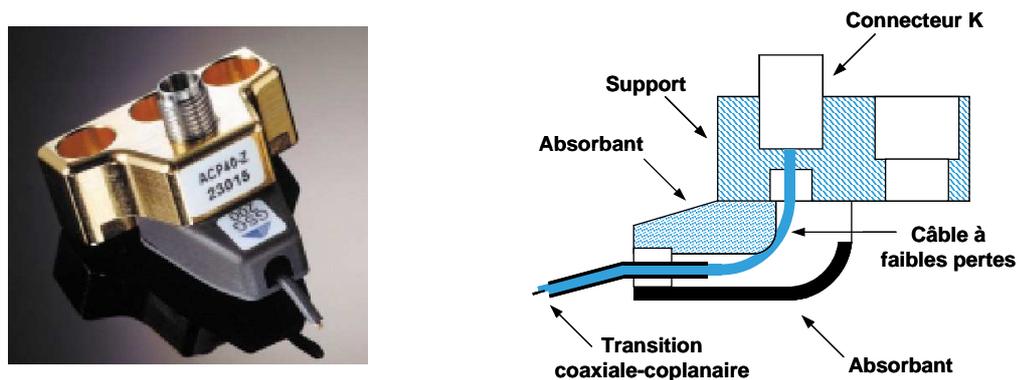


Figure 2 : Sonde hyperfréquence à transition coaxiale-coplanaire à air.

L'interface entre la sonde et la plaquette est assurée par des plots réalisés dans un alliage à base d'or. Le contact entre deux surfaces métalliques est intrinsèquement imparfait et se traduit électriquement par une impédance équivalente [8]. Typiquement, la résistance parasite de l'interface sonde-plot est de l'ordre de $100 \text{ m}\Omega$ mais peut dans certains cas dépasser 1Ω , ce qui évidemment la rend non négligeable. On supprime l'effet des contacts à l'aide de techniques de mesure qui seront détaillées plus loin. Cependant, toutes ces méthodes sont basées sur l'hypothèse implicite de la reproductibilité du contact, condition parfois difficile à remplir. Cette dernière remarque a donné lieu à une littérature abondante, mettant en évidence les nombreux paramètres impliqués dans la qualité d'un contact. On citera entre autres la force appliquée sur les pointes, l'état d'oxydation [9], l'état de surface de la pointe et des plots [10] ou encore la nature des métaux en présence. Deux types de terminaisons sont usuellement proposés pour la caractérisation hyperfréquence : l'une en Tungstène (W) et l'autre en Cuivre-Béryllium (BeCu). Cet alliage est

plus ductile que le Tungstène, ce qui assure une résistance de contact plus faible ainsi qu'une meilleure reproductibilité des contacts dans le cas de plots en or. Pour ces raisons, nous préférons des pointes en BeCu, bien qu'ayant travaillé avec les deux types de pointes, nous n'ayons pas observé de différences marquées.

3. Calibrage du banc de mesures

Les nombreuses erreurs introduites par le banc de mesures sont généralement classées suivant leur nature systématique ou aléatoire [11]. Seules les erreurs systématiques, prévisibles, sont efficacement corrigées et cette étape constitue ce que l'on appelle communément le calibrage. On peut en effet leur associer, de par leur reproductibilité, un modèle comportemental, plus ou moins complexe suivant les sources [12,13,14,15]. Nous retiendrons le modèle unidirectionnel à douze termes d'erreur [16], très largement utilisé et directement disponible sur l'analyseur [17]. L'identification des éléments du modèle passe par la mesure d'étalons aux caractéristiques connues. La précision de la mesure est donc directement liée à la précision de la caractérisation des standards et l'on comprend dès lors que le choix des étalons soit toujours un sujet très actuel. K. Silvonen évalue dans un article très complet [18] les performances de techniques de calibrage couramment utilisées. Nous nous limiterons pour notre part à une présentation des deux procédures les plus souvent citées dans la littérature : la méthode TRL [19], et la méthode que nous avons retenue pour nos mesures, la méthode SOLT [20].

3.1. Les sources d'erreurs

3.1.1. Les erreurs systématiques

Afin de calculer les paramètres de dispersion du dispositif, l'analyseur de réseau sépare à l'aide de coupleurs directifs le signal incident du signal réfléchi. Les erreurs de directivité sont dues à la non idéalité de ces coupleurs : une partie du signal incident est déviée sur la ligne couplée et une partie du signal réfléchi est transmise à la source. On modifie par conséquent la proportion entre l'onde incidente et l'onde réfléchie, la mesure s'en trouve évidemment affectée. L'erreur de directivité est interne à l'analyseur de réseau, elle est indépendante des caractéristiques du dispositif à mesurer. *A contrario*, la désadaptation d'impédance de la source peut être imputée à tout le système de mesure en aval. Elle est liée à la désadaptation, aux pertes et déphasages introduits par les éléments d'interconnexions (connecteurs, câbles, sondes...). Il en résulte de multiples réflexions à l'interface avec la source. La désadaptation du dispositif vis-à-vis du système de mesure en amont introduit également des réflexions parasites. Enfin, le commutateur permettant de diriger le signal d'excitation au port d'entrée ou de sortie est également source d'erreurs

puisqu'il introduit un couplage direct entre les deux ports. Tous les éléments parasites ont évidemment un comportement qui varie avec la fréquence, il est donc important de les caractériser sur tout le domaine fréquentiel d'étude.

La Figure 3 représente, dans le cas d'une excitation au port d'entrée (Port 1), le parcours de l'onde à travers la chaîne de mesure schématisée très grossièrement [1]. Le chemin de l'onde dans le cas idéal y apparaît en trait plein et les ondes parasites liées aux imperfections que nous venons de présenter en trait pointillé. La structure de l'analyseur étant symétrique, on ne détaille ici que les éléments du port d'entrée, par souci de clarté.

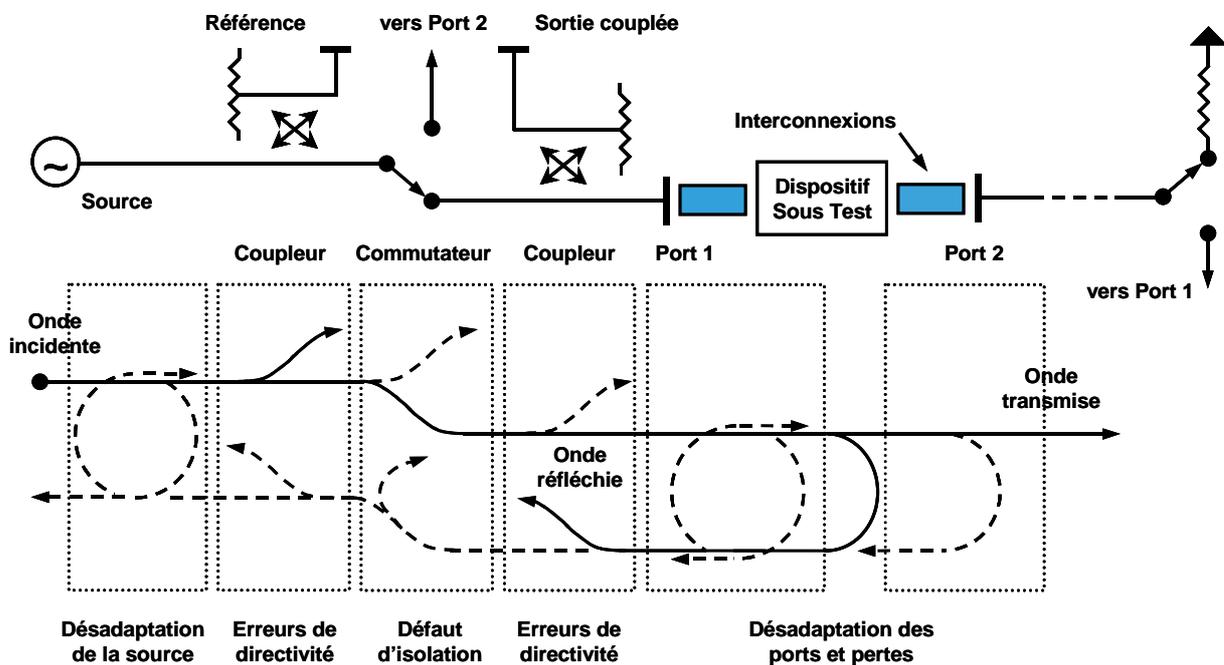


Figure 3 : Erreurs systématiques introduites par le système de mesure.

3.1.2. Les erreurs aléatoires

Une erreur aléatoire peut être définie d'une manière générale comme une modification imprévisible des caractéristiques de l'un des composants de la chaîne de mesure après le calibrage. Nous incluons donc ici également les erreurs dites de dérive. On citera, entre autres, la variation de la résistance de contact des commutateurs, la non reproductibilité des câbles et des connecteurs, ou encore, comme nous ne travaillons pas en ambiance régulée, la variation de la température de l'appareillage. Ces erreurs ne peuvent être corrigées, à l'exception de celles rapidement variables à valeur moyenne nulle. D'où l'importance de réaliser plusieurs séries de mesures. On veillera de plus à périodiquement refaire le calibrage du banc de mesures afin de limiter l'effet des erreurs lentement variables.

3.2. Les méthodes de calibrage

Le graphe de fluence de la Figure 4 symbolise le modèle d'erreurs implanté dans l'analyseur vectoriel HP 8753E pour une mesure réalisée au port d'entrée ou de sortie. Il fait clairement apparaître les sources d'erreurs précédemment introduites : le défaut de directivité (E_{DF} , E_{DR}), la désadaptation du port excitateur (E_{SF} , E_{SR}) et récepteur (E_{LF} , E_{LR}), l'atténuation des ondes au port excitateur (E_{RF} , E_{RR}) et récepteur (E_{TF} , E_{TR}), et enfin la diaphonie entre les ports d'entrée et de sortie (E_{XF} , E_{XR}), soit 12 termes au total. L'analyseur de réseau propose, afin d'identifier directement les paramètres du modèle, deux méthodes aux acronymes évocateurs : SOLT et TRL. Nous n'aborderons pas dans ce qui suit les développements (largement détaillés par la référence [17]) qui permettent de relier les paramètres d'erreur à la mesure des standards pour nous focaliser sur les avantages et inconvénients de chaque méthode.

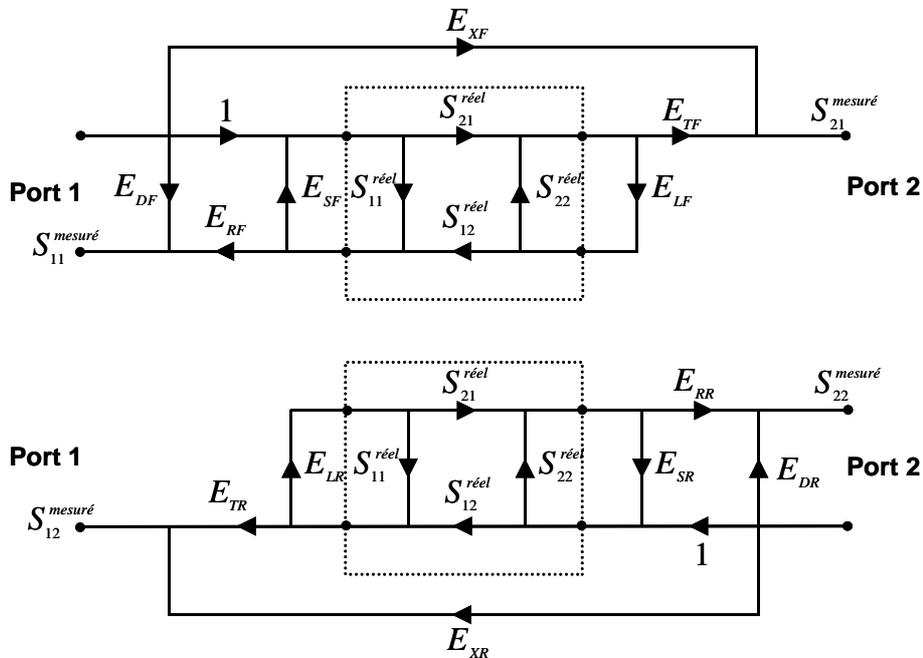


Figure 4 : Modèle d'erreurs à 12 termes respectivement pour une mesure Port 1 → Port 2 et Port 2 → Port 1.

La méthode SOLT permet l'identification du modèle complet alors que la méthode TRL renseigne une version simplifiée à dix termes. Cela suppose que l'impédance de chaque port ne soit pas modifiée par la commutation du signal d'excitation, ce que l'on traduit mathématiquement par $E_{SF} = E_{LR}$ et $E_{SR} = E_{LF}$. Le modèle d'erreurs devient alors bidirectionnel. Les étalons de calibrage nécessaires à chaque méthode sont déposés sur un substrat d'alumine ("Impedance Standard Substrate") fourni par le fabricant des sondes hyperfréquences [21]. L'intégration sur tranche des motifs correspondants, qui permettrait une automatisation de la procédure de calibrage ainsi que la prise en compte des éléments d'interconnexion de la plaquette, est difficile à mettre en œuvre. La dispersion statistique sur certains paramètres technologiques critiques, comme par exemple l'épaisseur et la conductivité du dépôt métallique, est évidemment inhérente à tout procédé

industriel mais elle interdit une définition précise des étalons sans une délicate étape d'ajustement ("Trimming").

3.2.1. La méthode TRL

La procédure de calibrage TRL requiert une ligne directe ("Thru"), un standard hautement réfléchissant symétrique ("Reflect"), comme un circuit ouvert ou un court-circuit, et une ligne de transmission ("Line"). Le principal avantage de cette méthode est qu'elle est peu exigeante quant à la précision des standards de référence. En effet, la ligne directe étant utilisée pour définir le plan de référence, seule sa longueur électrique doit être connue. La méthode TRL impose néanmoins que la ligne directe ("Thru") ait la même impédance caractéristique que la ligne de transmission ("Line"). Le comportement fréquentiel de la charge réfléchissante n'est pas nécessaire car elle n'est utilisée que pour discriminer les deux solutions d'une équation quadratique. Ainsi, la phase du coefficient de réflexion de la charge ne doit être spécifiée qu'à ± 90 degrés.

L'impédance caractéristique Z_c de la ligne est utilisée comme référence Z_0 dans la définition des paramètres de dispersion. En toute rigueur, elle doit donc être connue aussi précisément que possible et il existe à cet effet plusieurs techniques de caractérisation [22,23]. Malheureusement, l'analyseur de réseau exige que l'impédance de référence soit indépendante de la fréquence et l'on doit considérer Z_c comme constante si l'on désire profiter des possibilités du calculateur de l'analyseur pour réaliser en interne l'étape de calibrage. Cette exigence est difficile à garantir et on met ici le doigt sur un des inconvénients majeurs de la méthode ou de l'analyseur, suivant le point de vue adopté. D'autre part, afin d'éviter une redondance des standards "Thru" et "Line", le déphasage ϕ introduit par la ligne à une fréquence f doit être compris entre 20 et 160 degrés [1]. Pour une ligne de longueur l , on peut écrire :

$$\phi = 2\pi \cdot \frac{l}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\epsilon_{eff} \mu_{eff}}} \qquad (3.1)$$

avec λ : longueur d'onde du signal propagé.

c : vitesse de la lumière dans le vide.

ϵ_{eff} : permittivité électrique relative effective du milieu de propagation.

μ_{eff} : perméabilité magnétique relative effective du milieu de propagation.

L'expression de la fréquence en fonction du déphasage ϕ est donnée en (3.2) d'où l'on déduit immédiatement la plage de validité $\Delta f = [f_{min}, f_{max}]$ de la ligne, compatible avec la condition sur ϕ .

$$f(\phi) = \frac{c}{l \cdot \sqrt{\epsilon_{eff} \mu_{eff}}} \cdot \frac{\phi}{2\pi} \quad (3.2)$$

$$f_{min} = \frac{c}{18l \cdot \sqrt{\epsilon_{eff} \mu_{eff}}} \quad f_{max} = \frac{4c}{9l \cdot \sqrt{\epsilon_{eff} \mu_{eff}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = [f_{min}, 8f_{min}] \quad (3.3)$$

Le Tableau 1 reporte, pour les différentes lignes présentes sur le substrat de calibrage Cascade ($\epsilon_{eff} = 5,27$ et $\mu_{eff} = 1$), les fréquences minimale et maximale d'utilisation calculées d'après les équations ci-dessus. Il apparaît que la procédure TRL n'est pas "large bande" au sens où elle peut nécessiter plusieurs lignes pour caractériser correctement toute une plage de fréquences. Ceci ne facilite évidemment pas l'automatisation de l'étape de calibrage puisque la distance entre les pointes n'est alors pas constante. De plus, si l'on désire travailler en basse fréquence, la méthode implique l'utilisation de lignes qui peuvent être très longues. Des mesures à 100 MHz exigeraient par exemple sur le substrat précédemment décrit, l'intégration d'une ligne de 16 cm environ.

Longueur des lignes	5,25 mm	3,5 mm	1,8 mm	0,9 mm	0,45 mm
f_{min} (GHz)	1,38	2,23	4,03	8,06	16,13
f_{max} (GHz)	11,06	16,59	32,27	64,53	129,07

Tableau 1 : Fréquences limites d'utilisation des lignes du substrat de calibrage Cascade.

3.2.2. La méthode SOLT

La méthode SOLT fait appel à quatre standards : un court-circuit ("Short"), un circuit ouvert ("Open"), une charge 50 Ω ("Load") et une ligne directe ("Thru") dont les réponses doivent être connues aussi précisément que possible. Ces standards ont en effet des caractéristiques fréquentielles non idéales : le court-circuit est inductif, le circuit ouvert rayonne de l'énergie, et il est difficile d'obtenir une charge purement résistive sur une large bande de fréquences. Toutes ces imperfections sont représentées à l'aide de modèles directement implantés dans l'analyseur de réseau. Ces modèles, relativement simples et figés, ne permettent pas une description suffisante à haute fréquence des étalons hautement réfléchissants, aux réponses électriques complexes. Aussi cette méthode est-elle réputée pour être limitée en fréquence. Le circuit ouvert est, d'après certains auteurs [24], le standard le plus litigieux lorsque des pointes coplanaires sont utilisées. P. Crozat *et al.* [25] règlent ce problème en caractérisant précisément la capacité C_o , associée au circuit ouvert, d'après un calibrage préliminaire approximatif. Cette technique, alliant l'expérimentation, la modélisation et l'optimisation, autorise l'emploi de la méthode SOLT jusqu'à 40 GHz. Les sources référencées [24,26] montrent néanmoins, par comparaison à des méthodes avérées plus fiables en

haute fréquence (la méthode LRM [27] et LRRM [28] respectivement), que la méthode SOLT conventionnelle donne des résultats satisfaisants en deçà de 10 GHz.

Les mesures que nous avons à effectuer ne dépassant pas 6 GHz, notre substrat de calibrage comportant beaucoup plus de motifs SLT que de lignes comme le souligne la Figure 5, c'est cette dernière que nous retiendrons, de façon pragmatique. Notons que le substrat de calibrage fourni par la société Cascade Microtech ne comporte pas de motif en circuit ouvert, cet élément de calibrage correspondant à une mesure "sondes en l'air".

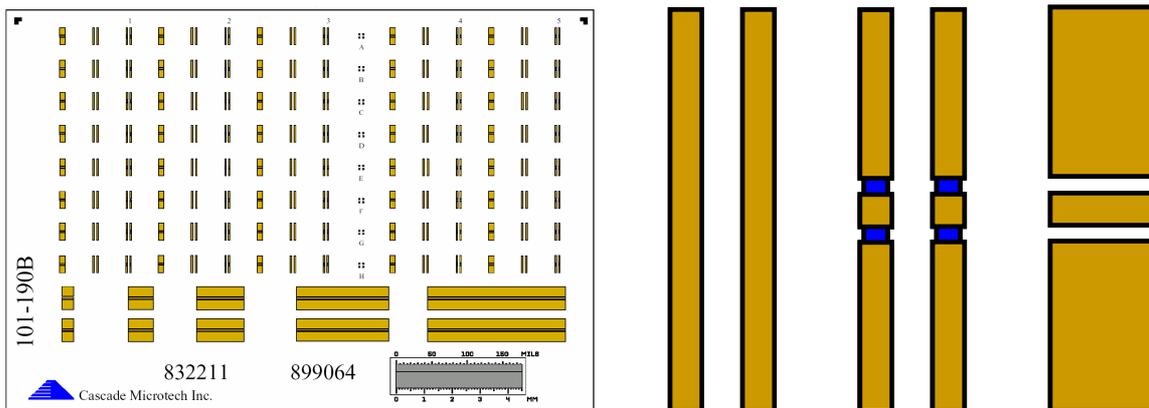


Figure 5 : Substrat de calibrage et les motifs "Short", "Load", et "Thru" pour sondes coplanaires.

4. Les méthodes de compensation

4.1. Introduction

En toute rigueur, un simple calibrage à l'aide d'un substrat ISS ("Impedance Standard Substrate") n'est pas suffisant dès lors que le support intégrant le composant à caractériser a des propriétés différentes du substrat de calibrage [29]. Les sondes hyperfréquences interagissent en effet avec le substrat sous-jacent et ce, nonobstant la couche isolante qui tapisse la face ventrale des sondes (voir la Figure 2). Ce couplage éventuel est d'ailleurs pris en compte lors de la mesure du circuit ouvert nécessaire au calibrage SOLT, mesure qui doit être réalisée à 250 μm minimum du substrat de calibrage. D'autre part, les méthodes de calibrage telles que nous les avons présentées ne prennent pas en compte le motif de mesure dont les caractéristiques électriques s'ajoutent à la réponse du composant. La Figure 6 donne la représentation schématique d'une structure de test. Le dispositif sous test (D.S.T.), ici une inductance spiralée, est relié à l'appareillage de mesure par l'intermédiaire d'éléments d'interconnexion et l'on retiendra pour le port d'entrée (respectivement de sortie) un plot de contact de signal noté P_1 (respectivement P_2), deux plots de contact de masse

notés M_1 (respectivement M_2) et une ligne d'accès. On peut certes réduire leur influence en diminuant leur taille, mais il existe une dimension minimale liée à leur fonction même.

La réalisation de standards de calibrage directement sur plaquette permettrait d'inclure l'influence des éléments d'interconnexion. Une telle approche a déjà été étudiée sans donner de résultats pleinement satisfaisants [30]. Une méthode intermédiaire combinant des structures de test aux caractéristiques parfaitement connues (calibrage) et des motifs, déposés sur la plaquette, permettant une détermination des parasites liés au motif de mesure (compensation) semble être la plus fiable. L'étape de calibrage réalise ainsi une translation du plan de référence depuis le détecteur de l'analyseur de réseau jusqu'aux pointes hyperfréquences et l'étape de compensation permet de l'amener aux extrémités du composant, ce que symbolise la Figure 6.

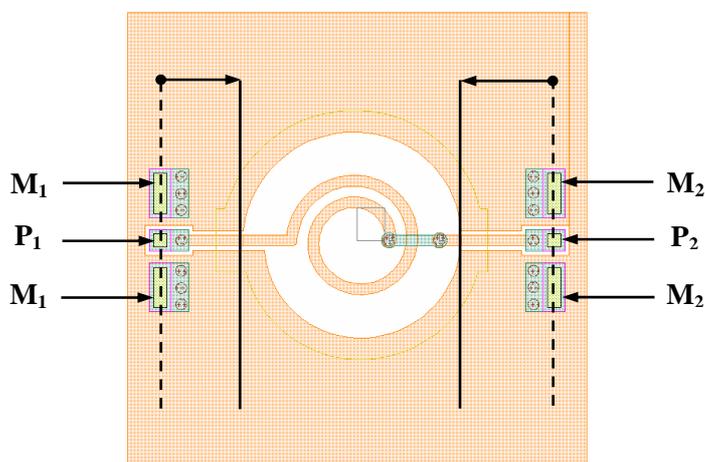


Figure 6 : Représentation schématique, sur une structure de test, du plan de référence après calibrage (- -) et après compensation (-).

Le processus de compensation se décompose en deux étapes. La première consiste à renseigner pour chaque point de fréquence les différents éléments d'un modèle de parasites. De nombreuses procédures de correction représentent l'environnement de mesure à l'aide d'un schéma électrique équivalent et présupposent par conséquent l'agencement des parasites autour du dispositif sous test. Cette modélisation structurelle impose certaines contraintes sur le motif de test. Il doit être conçu de manière à ce que les parasites qui lui sont attachés soient clairement identifiables. La seconde étape vise à extraire de la mesure brute l'influence des parasites et fait intervenir les transformations entre les différents modes de représentation d'un quadripôle : matrice impédance Z , matrice admittance Y , matrice chaîne [31]... Cette approche évite les longs et fastidieux calculs qui permettraient d'exprimer la mesure compensée directement en fonction de la mesure brute. Notons que toutes les représentations sont équivalentes, elles ne diffèrent que dans le choix des variables dépendantes et indépendantes [32]. Nous appellerons par la suite $T_{A \rightarrow B}$ la fonction de transition d'une représentation A vers une représentation B . Les équations de passage d'un formalisme à l'autre sont détaillées dans la référence [33].

4.2. Présentation des différentes méthodes

Les techniques de compensation, encore appelées techniques d'épluchage, se déclinent en de nombreuses variantes qui se différencient essentiellement par la complexité de la représentation de l'environnement de mesure. Cette dernière conditionne évidemment la précision de l'extraction, le domaine fréquentiel de validité et enfin, et ce point n'est pas le moins important, le nombre de motifs nécessaires à la résolution des paramètres du modèle. Nous présenterons dans un premier temps les procédures les plus couramment utilisées en métrologie RF ainsi que les méthodes que nous avons pu développer.

4.2.1. La méthode des paramètres Y

La méthode des paramètres Y est une méthode très simple puisqu'elle ne corrige que les capacités et conductances parallèles du motif de mesure [34,35]. Le modèle de parasites présenté sur la Figure 7 a une structure en π . Il comporte deux admittances Y_1 et Y_2 représentant le couplage électromagnétique entre le contact de signal et le contact de masse. L'admittance d'isolation Y_3 traduit, quant à elle, le couplage entre le port d'entrée et le port de sortie. Ce dernier a plusieurs origines puisqu'il peut s'agir d'une interaction directe entre les pointes coplanaires ou encore du rayonnement d'une ligne à l'autre par l'intermédiaire du substrat [36].

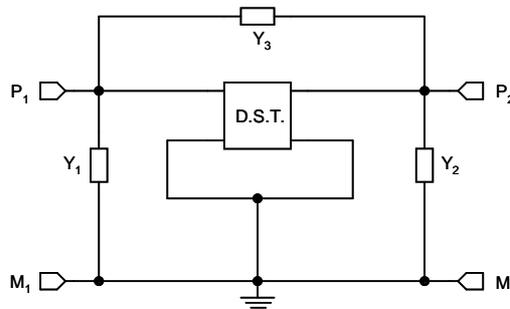


Figure 7 : Modèle du dispositif et du motif de mesure.

Une mesure de la structure de test en circuit ouvert $[Y_{co}]$ (Figure 8) permet de caractériser les différents paramètres du modèle et l'on démontre que la compensation de la mesure exprimée en formalisme admittance $[Y_m]$ se limite à une simple soustraction matricielle :

$$[Y_m^{compensé}] = [Y_m] - [Y_{co}] \quad \text{avec} \quad [Y_{co}] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Cette procédure, à la précision limitée, a néanmoins l'avantage de ne nécessiter qu'un seul motif de compensation. Elle est donc très économique du point de vue de l'encombrement sur la plaquette.

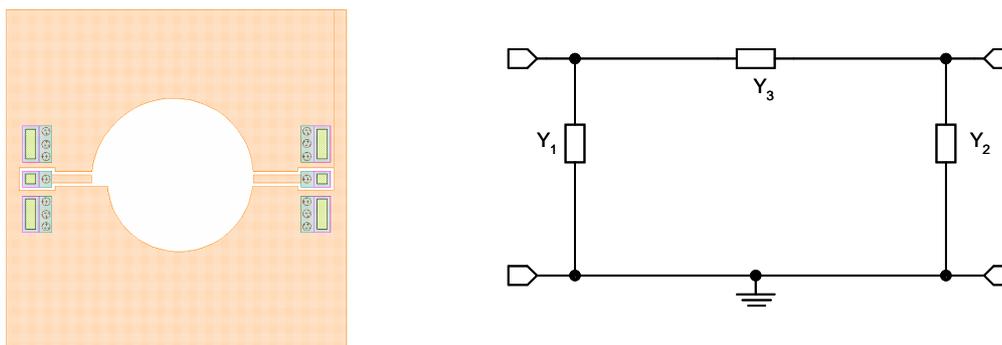


Figure 8 : Motif de mesure en circuit ouvert et son modèle électrique.

4.2.2. La méthode des paramètres YZ

La méthode décrite ci-dessus ne permet pas la prise en compte de l'impédance "série" des lignes d'accès et des contacts, qui pourtant ne peut être négligée dans le domaine des Radio-Fréquences. Un modèle plus complexe, faisant autorité dans le domaine de la mesure haute fréquence [37], a été développé par M. Koolen [38] afin de corriger l'influence de ces parasites "série". Le schéma électrique équivalent (cf. Figure 9) inclut le précédent. L'impédance Z_1 (respectivement Z_2) représente la ligne de signal au port d'entrée (respectivement de sortie), c'est-à-dire l'impédance de la ligne d'accès en série avec l'impédance de contact de l'interface sonde-plot. L'impédance Z_3 est, quant à elle, liée au contact de masse. Notons que l'admittance Y_3 lie directement les ports d'entrée et de sortie, ce qui signifie que l'on suppose négligeable le couplage entre les deux lignes d'accès.

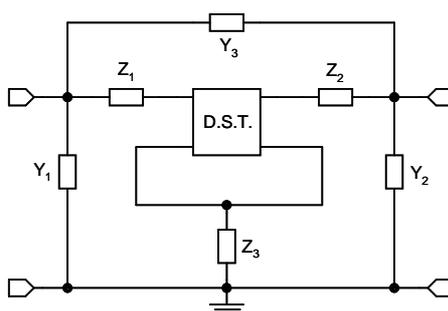


Figure 9 : Modèle du dispositif et du motif de mesure.

Deux mesures sont nécessaires à la caractérisation des différents éléments du modèle ci-dessus. La première est une mesure en circuit ouvert [Y_{co}] dont le modèle a été présenté au paragraphe précédent. Les composantes "séries" du modèle sont, pour leur part, identifiées à l'aide de la caractéristique [Z_{cc}] d'un motif court-circuité, représenté Figure 10. Le processus de compensation se décompose comme suit.

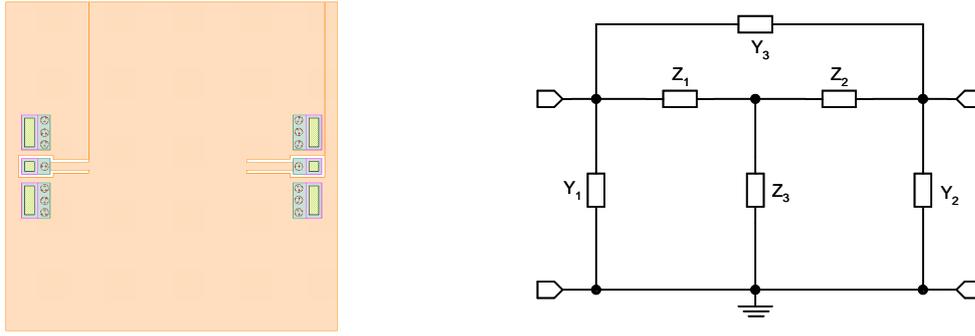


Figure 10 : Motif de mesure en court-circuit et son modèle électrique.

- La mesure en court-circuit est dans un premier temps compensée d'après la méthode des paramètres Y. En introduisant la notation de conversion d'un type de paramètres à un autre que nous avons définie, on peut écrire :

$$[Z_{cc}^{compensé}] = T_{Y \rightarrow Z}(T_{Z \rightarrow Y}([Z_{cc}]) - [Y_{co}]) \quad \text{et l'on a} \quad [Z_{cc}^{compensé}] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- La méthode des paramètres YZ est également connue sous le nom de méthode "deux étapes". Les parasites sont en effet retranchés de la mesure globale à l'aide de deux transformations successives $Y \leftrightarrow Z$. On comprend dès lors pourquoi les étapes de compensation sont parfois appelées étapes d'épluchage, traduction littérale du terme anglais "de-embedding".

$$[Y_m^{compensé}] = T_{Z \rightarrow Y}(T_{Y \rightarrow Z}([Y_m]) - [Y_{co}]) - [Z_{cc}^{compensé}] \quad (4.3)$$

La méthode des paramètres YZ a été initialement développée pour la caractérisation haute fréquence de transistors bipolaires. Le transistor est un composant à trois broches, et nécessite, de fait, une troisième ligne d'accès afin de connecter l'émetteur à la masse. Les composants passifs étudiés ne comportant pas de connexion directe à la masse (*cf.* Figure 6), on peut légitimement s'interroger sur l'utilité du dipôle Z_3 qui, nous l'avons vu, représente alors l'imperfection du contact de masse. Un modèle de parasites est *a priori* d'autant plus descriptif que le nombre d'éléments pris en compte est grand. Cependant, il est également plus sensible aux erreurs de mesure. Ainsi, la précision sur la détermination de Z_3 est-elle directement conditionnée par la qualité du court-circuit. Si les caractéristiques électriques de ce dernier deviennent non négligeables, l'extraction de Z_3 s'en trouve polluée. D'où l'utilisation d'un plan de métallisation et non pas de simples lignes pour réaliser le court-circuit (*cf.* Figure 10), afin que la matrice impédance $[Z_{cc}]$ qui le caractérise soit aussi faible que possible.

4.2.3. La méthode "trois étapes"

Une autre variante très souvent citée dans la littérature a été développée par H. Cho *et al.* [39]. Cette méthode nécessite quatre motifs de compensation dans sa version originale et ne permet cependant l'identification que de six dipôles parasites (Figure 11), ce qui en fait une méthode coûteuse du point de vue de l'encombrement sur plaquette. Ainsi, une ligne de transmission est utilisée pour caractériser les lignes d'accès. Diverses approximations sont réalisées afin de simplifier l'identification des parasites [40], et l'une d'entre elles consiste à négliger la distance séparant l'extrémité des lignes d'accès devant la longueur de ces mêmes lignes. Si cette simplification se justifie pleinement dans le cas du transistor bipolaire, composant ayant des dimensions négligeables devant celles du motif de caractérisation, on ne peut en aucun cas l'étendre au cas des composants passifs. Cette dernière remarque rend la méthode de H. Cho inapplicable en l'état.

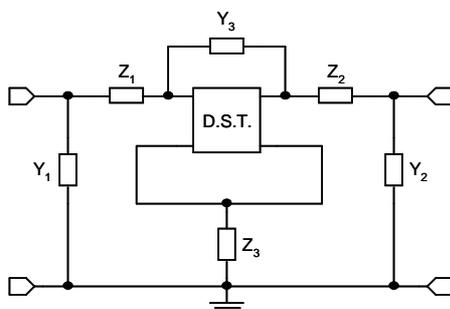


Figure 11 : Modèle du dispositif et du motif de mesure.

La méthode que nous proposons, reprend la structure du modèle ci-dessus. Elle se distingue de la méthode YZ précédemment décrite par le positionnement de l'impédance Y_3 : le couplage entre les deux ports intervient en bout de ligne. De plus, deux mesures, en circuit ouvert et en court-circuit, permettent l'identification de tous les parasites. Les modèles respectifs sont rappelés Figure 12. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que cette méthode est exacte au sens où aucune approximation n'est réalisée lors de la détermination des éléments parasites du circuit équivalent.

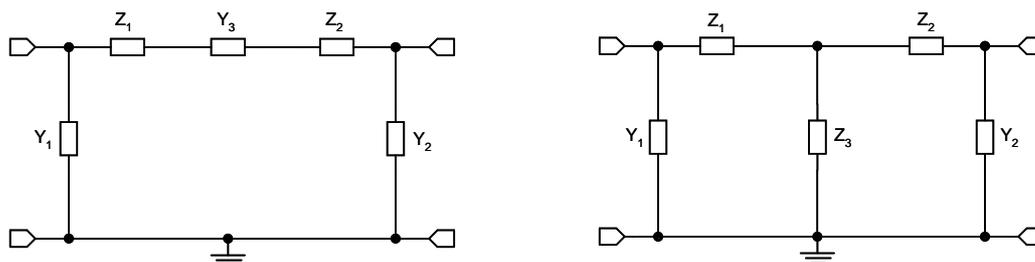


Figure 12 : Modèles respectifs du motif de mesure en circuit ouvert et en court-circuit.

- Le processus de compensation est un peu plus complexe que dans les techniques déjà étudiées car les parasites parallèles et séries sont à présent imbriqués. La mesure en court-circuit est corrigée à l'aide de la relation ci-après et l'on déduit directement de l'équation (4.2) les impédances Z_1, Z_2, Z_3 .

$$[Z_{cc}^{compensé}] = T_{Y \rightarrow Z} \left(T_{Z \rightarrow Y}([Z_{cc}]) - \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} \right), \quad (4.4)$$

$$\text{où} \quad Y_1 = [Y_{co}]_{11} + [Y_{co}]_{12} \quad \text{et} \quad Y_2 = [Y_{co}]_{22} + [Y_{co}]_{12} \quad (4.5)$$

- L'impédance d'isolation Y_3 est, quant à elle, donnée par la relation (4.6).

$$Y_3 = -\frac{[Y_{co}]_{12}}{1 + (Z_1 + Z_2) \cdot [Y_{co}]_{12}} \quad (4.6)$$

- Les mesures sont finalement corrigées à l'aide de l'équation matricielle suivante :

$$[Y_m^{compensé}] = T_{Z \rightarrow Y} \left(T_{Y \rightarrow Z} \left([Y_m] - \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} \right) - [Z_{cc}^{compensé}] \right) - \begin{bmatrix} Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

4.2.4. La méthode des lignes

Cette méthode de compensation, notée **Li**, est issue des travaux de J.-L. Carbonéro [26]. Développée pour la correction de mesures de transistors MOSFET, elle demeure générale et très complète puisque le modèle électrique associé au motif de mesure comporte 16 termes d'erreur. Cependant, l'identification du modèle complet nécessite cinq motifs de compensation, ce qui rend cette méthode moins attractive. Nous lui préférons la version simplifiée de la Figure 13, qui présente l'avantage de n'employer que quatre structures de compensation : d'une part, une ligne de transmission coplanaire (Figure 14) accompagnée de son circuit ouvert (Figure 15) et de son court-circuit (Figure 16), et d'autre part, un motif de mesure court-circuité schématisé Figure 10. Il est important de noter que les motifs de la ligne ne sont pas attachés au composant. La méthode **Li** requiert, en effet, comme nous le verrons plus loin, une seule et même ligne quel que soit le motif de mesure à compenser, dès lors que cette dernière présente des caractéristiques géométriques transversales identiques à celles des lignes d'accès. Ainsi, la méthode **Li** limite à un le nombre de motifs par composant, ce qui représente un gain de place considérable.

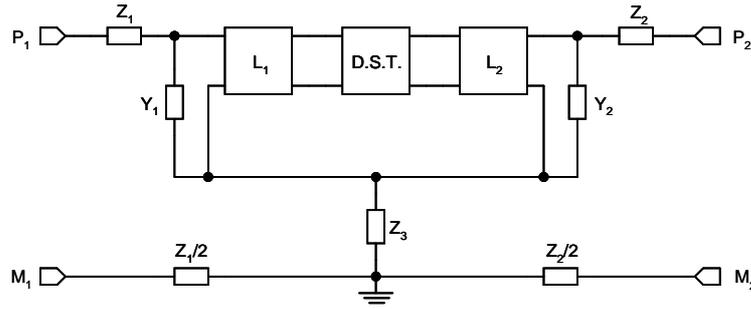


Figure 13 : Modèle du dispositif et de son motif de mesure.

La méthode des lignes se distingue principalement des précédentes car les lignes d'accès sont à présent représentées par deux quadripôles $[L_1]$ et $[L_2]$. De plus, la modélisation retenue pour les interfaces sonde-plot permet de clairement distinguer les contacts de signal (P_1 et P_2) d'impédance Z_1 et Z_2 et les contacts de masse (M_1 et M_2) d'impédance équivalente $Z_1/2$ et $Z_2/2$ [41]. Le dipôle Z_3 peut être imputé à la portion du plan de masse entourant les lignes d'accès. Toutes ces grandeurs sont déterminées d'après une mesure du motif de mesure en court-circuit $[Z_{cc}^t]$, et le processus de compensation est identique à celui introduit au paragraphe 4.2.2. Pourquoi ne pas déduire de la mesure de la ligne de transmission court-circuitée $[Z_{cc}^t]$ (Figure 16) les impédances des plots de contacts ? Tout simplement parce que ce motif n'est pas à proximité directe des composants à caractériser, malheureusement. La reproductibilité des contacts est, nous l'avons vu, une propriété locale et une impédance équivalente ne peut, en conséquence, être extrapolée d'après la mesure d'un motif éloigné. La méthode développée n'est donc pas optimale en l'état : attacher à chaque réticule une ligne de transmission et ses motifs de compensation devrait permettre de s'affranchir de ces problèmes de reproductibilité, et donc éviter un recours à un standard supplémentaire. En conclusion, nous distinguerons dans ce qui suit les impédances de contact (Z_1^t , Z_2^t) ainsi que l'impédance Z_3^t du plan de masse, associées à la ligne de transmission, de leurs équivalents liés au motif de mesure du composant (Z_1 , Z_2 , Z_3). Le modèle du motif de mesure de la ligne est donc finalement le suivant :

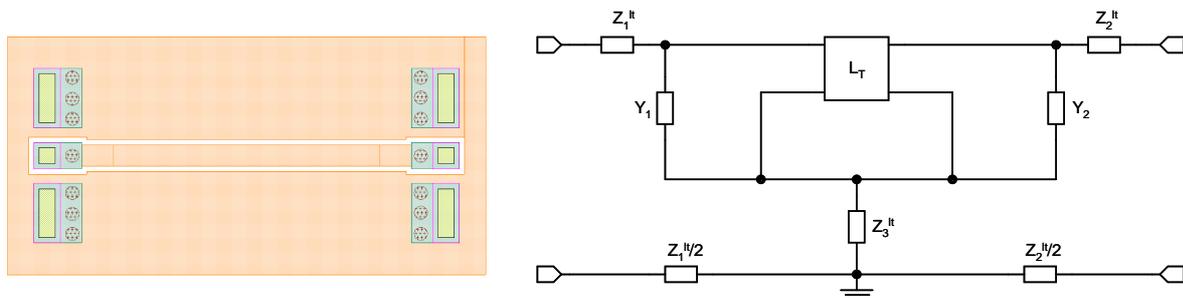


Figure 14 : Motif de mesure de la ligne de transmission et son modèle électrique.

Les admittances Y_1 et Y_2 traduisent l'interaction directe entre la pointe de signal et la pointe de masse. Elles sont caractérisées à l'aide d'une mesure de la ligne de transmission en circuit ouvert $[Y_{co}^{lt}]$ (Figure 15). En effet, la configuration des plots sur ce motif est identique à celle du motif de mesure. Cette dernière remarque explique d'ailleurs pourquoi le modèle ne comporte pas d'admittance d'isolation : le motif de ligne en circuit ouvert et le motif de mesure ne sont tout simplement pas équivalents du point de vue de l'isolation. On suppose donc implicitement que le couplage entre les deux ports est négligeable, en d'autres termes que l'admittance en transmission du D.S.T est grande devant l'admittance d'isolation.

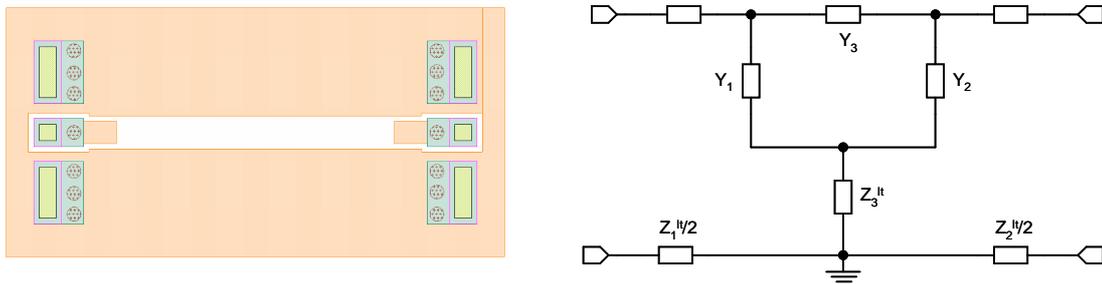


Figure 15 : Motif de mesure de la ligne de transmission en circuit ouvert et son modèle électrique.

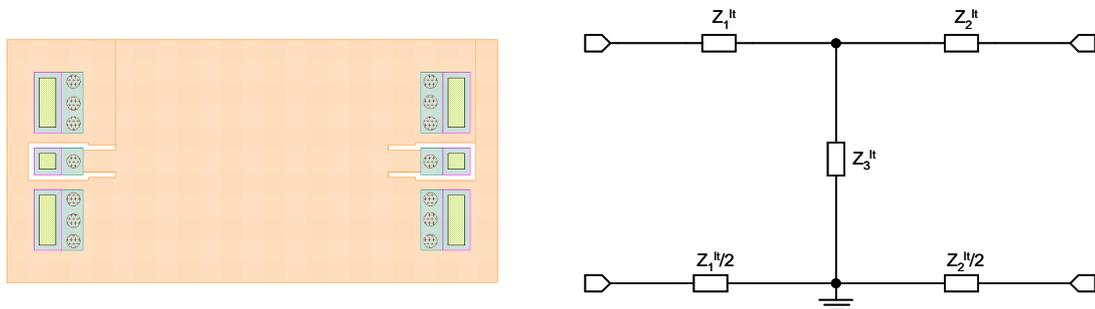


Figure 16 : Motif de mesure de la ligne de transmission en court-circuit et son modèle électrique.

4.2.4.1 Caractérisation des lignes d'accès

Les lignes d'accès sont modélisées par deux quadripôles $[L_1]$ et $[L_2]$ identifiés d'après la mesure de la ligne coplanaire $[Z_{lt}]$. La ligne de transmission présente les mêmes caractéristiques géométriques (largeur des pistes, épaisseur du dépôt, espacement au plan de masse) que les lignes d'accès au composant, ce qui permet de déduire les quadripôles $[L_1]$ et $[L_2]$ de $[Z_{lt}]$. Nous aborderons ce problème à l'aide de la théorie des lignes. Dans le cadre de l'électromagnétisme quasi statique, le comportement d'une ligne de transmission est en effet régi par l'équation des télégraphistes [42]. La ligne est alors complètement définie par deux paramètres : le coefficient de propagation complexe γ et l'impédance caractéristique Z_c . Ceci implique que la distance séparant la

ligne du plan de masse soit faible devant la longueur d'onde et que la permittivité diélectrique du substrat sous-jacent ne soit pas trop grande [43].

- Le calcul de Z_c et γ débute par la compensation de la mesure de la ligne de transmission. Nous avons tout intérêt à prendre une ligne longue, d'une part afin d'accroître la contribution de la ligne au détriment de ses parasites d'accès [44] et d'autre part pour limiter l'incertitude quant à sa longueur effective, conditionnée par le positionnement des pointes.

$$[Y_{co}^{compensé}] = T_{Z \rightarrow Y} (T_{Y \rightarrow Z} ([Y_{co}^{lt}] - [Z_{cc}^{lt}])) \quad (4.8)$$

$$[Y_{lt}^{compensé}] = T_{Z \rightarrow Y} ([Z_{lt}] - [Z_{cc}^{lt}]) - [Y_{co}^{compensé}] \quad (4.9)$$

- L'impédance caractéristique Z_c de la ligne est donnée par la formule :

$$Z_c = \sqrt{\frac{B_{lt}}{C_{lt}}} \quad \text{avec} \quad T_{Y \rightarrow ABCD} ([Y_{lt}^{compensé}]) = \begin{bmatrix} A_{lt} & B_{lt} \\ C_{lt} & D_{lt} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La matrice $[Y_{lt}]$ étant symétrique et réciproque, on a $A_{lt} = D_{lt}$ ainsi que $A_{lt}D_{lt} - B_{lt}C_{lt} = 1$.

- La détermination du coefficient de propagation passe par la résolution du système non linéaire (4.11). Ce dernier fait intervenir la longueur l de la ligne de transmission.

$$\begin{cases} \text{ch}(\gamma \cdot l) = A_{lt} \\ Z_c \cdot \text{sh}(\gamma \cdot l) = B_{lt} \end{cases} \quad (4.11)$$

La technique utilisée diffère légèrement des travaux de Eisenstadt [45] souvent cités en référence puisque l'on utilise le rapport des deux équations du système. La fonction cotangente hyperbolique (cth) complexe est en effet bijective sur la droite réelle contrairement à la fonction cosinus hyperbolique (ch), ce qui permet de lever une ambiguïté quant au choix de la solution, la réciproque ($arccth$) étant définie de manière unique.

$$\text{On pose} \quad z = x + iy = Z_c \cdot \frac{A_{lt}}{B_{lt}}, \quad (4.12)$$

$$\text{il vient alors} \quad \gamma = \text{arccth}(z) = \frac{1}{2l} \cdot \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad (4.13)$$

Soit α le coefficient d'atténuation et β le coefficient de propagation (réel) de la ligne : $\gamma = \alpha + i\beta$. On montre que :

$$\alpha = \frac{1}{4l} \cdot \ln \left[\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \right] \quad (4.14)$$

$$\beta = \frac{1}{2l} \cdot \left\{ \left[1 - \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 1) \right] \cdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) + 2k\pi \right\} \quad \text{avec } k \text{ entier.} \quad (4.15)$$

La partie imaginaire de γ est définie à $\pi k/l$ près, ce qui autorise *a priori* une infinité de solutions. Afin d'éviter lors de la compensation l'apparition de résonances parasites non physiques, on retient la solution permettant d'assurer la continuité en fréquence du coefficient de propagation β . La Figure 17 donne l'évolution en fréquence de β pour une ligne coplanaire de largeur $50 \mu\text{m}$, d'espacement au plan de masse $20 \mu\text{m}$ et de longueur 2 mm . La correction angulaire a pour effet de supprimer l'artefact aux environs de 22 GHz .

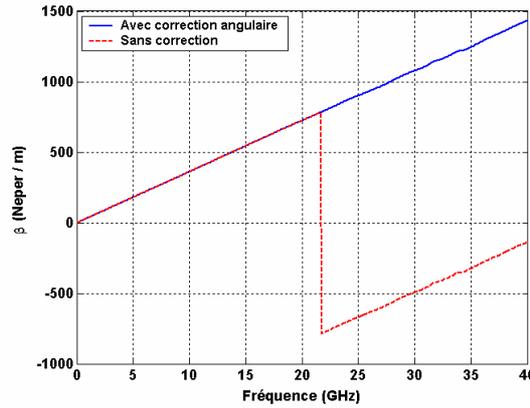


Figure 17 : Effet de la correction angulaire sur le coefficient de propagation β

- Les équations numérotées (4.16) donnent l'expression des matrices chaînes $[L_1]$ et $[L_2]$, associées aux lignes d'accès de longueurs respectives l_1 et l_2 .

$$[L_1] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\gamma \cdot l_1) & Z_c \cdot \operatorname{sh}(\gamma \cdot l_1) \\ \operatorname{sh}(\gamma \cdot l_1)/Z_c & \operatorname{ch}(\gamma \cdot l_1) \end{bmatrix} \quad [L_2] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\gamma \cdot l_2) & Z_c \cdot \operatorname{sh}(\gamma \cdot l_2) \\ \operatorname{sh}(\gamma \cdot l_2)/Z_c & \operatorname{ch}(\gamma \cdot l_2) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.2.4.2 Caractérisation des contacts

Le réseau électrique décrivant le court-circuit, Figure 18, est issu du schéma de la Figure 13. Ce motif de test permet l'identification des impédances Z_1 , Z_2 , et Z_3 car il est, sur nos plaquettes, à proximité directe du composant. L'impédance de court-circuit Z_{cc} , quoique négligeable, est

nécessaire au calcul analytique de la matrice impédance $[Z_{cc}]$ équivalente au modèle présenté. On démontre par passage à la limite ($Z_{cc} \rightarrow 0$) que l'expression de cette dernière est donnée par :

$$[Z_{cc}] = \begin{bmatrix} \frac{Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_1)}{1 + Y_1 Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_1)} + \frac{3}{2} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & \frac{Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_2)}{1 + Y_2 Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_2)} + \frac{3}{2} Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

La matrice impédance $[Z_{pc}]$, associée aux plots de contacts du motif de mesure, est immédiatement déduite par identification :

$$[Z_{pc}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & \frac{3}{2} Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} = [Z_{cc}] - \begin{bmatrix} \frac{Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_1)}{1 + Y_1 Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_1)} & 0 \\ 0 & \frac{Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_2)}{1 + Y_2 Z_c \cdot \tanh(\gamma \cdot l_2)} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

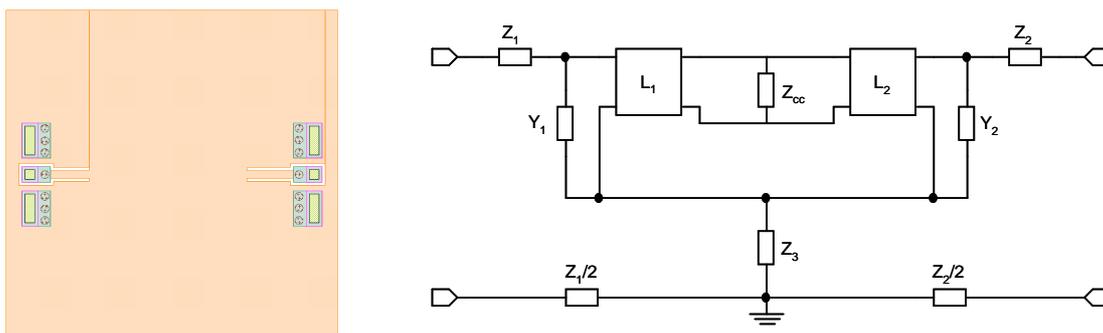


Figure 18 : Motif de mesure en court-circuit et son modèle électrique, méthode Li.

Dès lors, les paramètres corrigés du dispositif s'obtiennent à l'aide de la relation matricielle (4.20). Remarquons comme le formalisme ABCD condense le processus de compensation. La mise en cascade de quadripôles se traduit tout simplement par le produit des matrices chaînes associées.

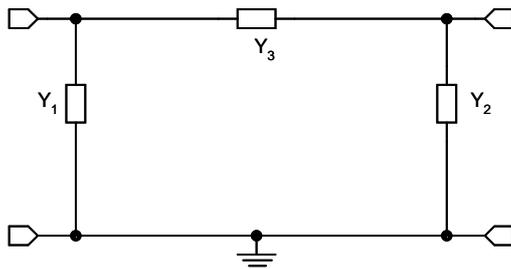
$$Y_1 = [Y_{co}^{compensé}]_{11} + [Y_{co}^{compensé}]_{12} \quad \text{et} \quad Y_2 = [Y_{co}^{compensé}]_{22} + [Y_{co}^{compensé}]_{12} \quad (4.19)$$

$$[Y_m^{compensé}] = [L_1]^{-1} \cdot T_{Y \rightarrow ABCD} \left(T_{Z \rightarrow Y} (T_{Y \rightarrow Z} ([Y_m]) - [Z_{pc}]) - \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} \right) \cdot [L_2]^{-1} \quad (4.20)$$

4.3. Définition d'un outil de comparaison

Il convient avant d'aller plus loin de déterminer sous quel jour éclairer les résultats donnés par les différentes méthodes de compensation ; car si toutes les représentations d'un quadripôle

sont mathématiquement équivalentes, certaines sont plus propices à l'interprétation que d'autres. A ce titre, le schéma électrique en π de la Figure 19 apparaît comme un excellent candidat. S'il est vrai qu'il est difficile d'assigner précisément à une composante du modèle telle ou telle caractéristique physique, on peut néanmoins affirmer que les admittances Y_1 et Y_2 , qui traduisent électriquement le couplage à la masse, reflètent partiellement les propriétés du substrat, alors que l'admittance Y_3 exprime en premier lieu les propriétés du composant déposé sur ce substrat. Il est important de préciser que le modèle retenu est exact à condition que le quadripôle associé au composant soit réciproque, ce qui est vérifié dans le cas des composants passifs.



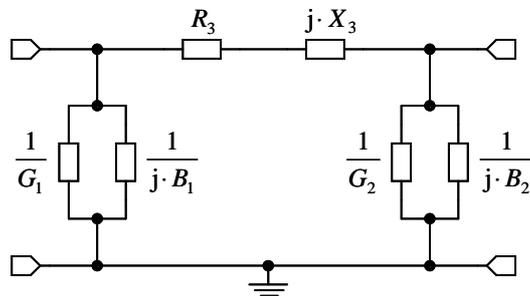
$$Y_1 = [Y_m^{compensé}]_{11} + [Y_m^{compensé}]_{12}$$

$$Y_2 = [Y_m^{compensé}]_{22} + [Y_m^{compensé}]_{12}$$

$$Y_3 = -[Y_m^{compensé}]_{12}$$

Figure 19 : Représentation en π de la mesure compensée.

Notre objectif est de comparer les méthodes de compensation sur un grand nombre de cas, ce qui implique la mise en place de procédures de traitement automatique. Pour chaque composant testé, un écart moyen ainsi qu'un écart maximum seront calculés sur la bande de fréquences étudiée. Ces calculs nécessitent des grandeurs réelles et nous retenons en conséquence pour l'interprétation de nos résultats le modèle de la Figure 20, qui scinde la partie réelle et la partie imaginaire de chaque admittance. La structure présente également l'intérêt d'être très proche des schémas électriques couramment retenus dans la modélisation de composants passifs [46], ce qui en facilite l'analyse.



$$Y_1 = G_1 + j \cdot B_1$$

$$Y_2 = G_2 + j \cdot B_2$$

$$Y_3 = \frac{1}{R_3 + j \cdot X_3}$$

Figure 20 : Schéma électrique retenu pour la comparaison.

Une mesure se réduit donc à la connaissance de six paramètres réels : $G_1, B_1, G_2, B_2, R_3, X_3$, chacun de ces paramètres étant une fonction de la fréquence. L'équation (4.21) définit l'écart relatif moyen entre deux variables $(X_B, X_A) \in \{G_1, B_1, G_2, B_2, R_3, X_3\}^2$, respectivement obtenues pour des

conditions B données et des conditions A de référence. Chaque composant est mesuré sur plusieurs réticules et les résultats sont ensuite "moyennés", ce qui permet de limiter l'influence des erreurs de mesure résiduelles. Malgré cette précaution, une intégration numérique suivant la fréquence (f) est nécessaire afin de désensibiliser le calcul vis-à-vis du bruit de mesure, le calcul d'écart moyen conventionnel s'étant révélé inexploitable. Elle est réalisée par la méthode des trapèzes [47] sur la bande de fréquences $[f_{min}, f_{max}]$ avec dans notre cas : $f_{min} = 0$ et $f_{max} = 6$ GHz. L'équation (4.22), qui découle naturellement de la précédente, donne un équivalent pour l'écart relatif maximum.

$$E_{moy}(X_B, X_A) = \frac{\int_{f_{min}}^{f_{max}} |X_B(f) - X_A(f)| \cdot df}{\int_{f_{min}}^{f_{max}} |X_A(f)| \cdot df} \quad (4.21)$$

$$E_{max}(X_B, X_A) = \frac{\max_{[f_{min}, f_{max}]} |X_B(f) - X_A(f)|}{|\overline{X_A}(f)|} \quad (4.22)$$

4.4. Validation de la méthode des lignes

Le terme de "validation" que nous venons d'employer est sans doute un peu fort car il sous-entend un dispositif de référence, aux caractéristiques précisément connues, que nous ne possédons pas. Nous allons plus modestement tenter d'établir un faisceau d'indices nous permettant d'accorder un certain crédit à cette méthode. Cela passe dans un premier temps par une vérification numérique de la procédure de calcul des paramètres caractéristiques d'une ligne. Puis, nous comparerons les résultats de cette extraction à ceux obtenus par une technique ne faisant pas intervenir la compensation, pour ensuite estimer la précision de la caractérisation des lignes d'accès. Enfin, nous tenterons d'évaluer le pouvoir descriptif du modèle d'erreurs dans le cas du circuit ouvert, que n'utilise pas la méthode développée.

4.4.1. Contrôle de l'extraction de Z_c et γ

Le processus d'extraction de l'impédance caractéristique Z_c et du coefficient de propagation complexe γ qui découle de l'équation des télégraphistes est relativement complexe et se distingue légèrement de l'approche communément retenue. Ces deux remarques justifient une vérification et nous avons mis au point, dans ce but, une méthode très simple, basée sur la propriété de mise en cascade des matrices chaînes. Elle dérive directement de l'approche de J.-L. Carbonéro [26] qui décompose la ligne coplanaire complète en N lignes identiques de longueur $l_c = l/N$ (cf. Figure 21). Remarquons dès à présent que si cette méthode est formellement plus simple que la méthode des

télégraphistes, elle reste numériquement plus délicate à mettre en œuvre car elle implique un calcul aux valeurs et aux vecteurs propres.



Figure 21 : Décomposition de la ligne en cellules élémentaires.

- La matrice chaîne $[C]$ de la cellule élémentaire est calculée en recherchant la racine $N^{\text{ième}}$ de la matrice chaîne de la ligne complète :

$$[C_i] = [C] = [L]^{\frac{1}{N}} \quad \forall \quad i \in [1, N] \quad (4.23)$$

- Les matrices $[L_1]$ et $[L_2]$ sont alors constituées par la mise en cascade de N_1 et N_2 tronçons élémentaires. Elles dépendent de la variable l_c par l'intermédiaire de N , N_1 et N_2 .

$$[L_1(l_c)] = [C]^{N_1} = [L]^{\frac{N_1}{N}} \quad \text{et} \quad N_1 = \left\lfloor \frac{l_1}{l_c} \right\rfloor \quad (4.24)$$

$$[L_2(l_c)] = [C]^{N_2} = [L]^{\frac{N_2}{N}} \quad \text{et} \quad N_2 = \left\lfloor \frac{l_2}{l_c} \right\rfloor \quad (4.25)$$

- On obtient finalement l'expression (4.26) des matrices $[L_1]$ et $[L_2]$ par passage à la limite, c'est-à-dire en considérant des subdivisions infinitésimales.

$$[L_1] = \lim_{l_c \rightarrow 0} [L_1(l_c)] = [L]^{\frac{l_1}{l}} \quad \text{et} \quad [L_2] = \lim_{l_c \rightarrow 0} [L_2(l_c)] = [L]^{\frac{l_2}{l}} \quad (4.26)$$

L'extraction de Z_c et γ est effectuée d'après la mesure $[L]$, jusqu'à 40 GHz, d'une ligne de largeur $50 \mu\text{m}$, d'espacement au plan de masse $20 \mu\text{m}$, et de longueur $l = 2 \text{ mm}$. On construit ensuite à l'aide de la formule (4.16) la matrice chaîne $[L_1]$ d'une ligne de longueur $l_1 = 70 \mu\text{m}$, ce qui correspond environ à la ligne d'accès la plus courte que nous serons susceptibles de rencontrer. Ce résultat est comparé à celui obtenu d'après les développements décrits ci-dessus, en utilisant l'outil d'interprétation défini au paragraphe 4.3. Nous avons retenu une ligne courte car l'extrapolation de $[L_1]$ d'après $[L]$ est d'autant plus marquée que $\Delta l = l - l_1$ est grand. Les écarts reportés dans le Tableau 2, inférieurs à $10^{-7} \%$, sont totalement négligeables. Ceci ne constitue

certes pas une démonstration irréfutable de la pertinence de l'extraction des paramètres Z_c et γ ; la convergence des résultats n'en est pas moins significative.

Paramètres électriques	Ecart moyen (%)	Ecart maximal (%)
G_1, G_2	2.10^{-10}	2.10^{-8}
B_1, B_2	3.10^{-11}	2.10^{-9}
R_3	7.10^{-12}	5.10^{-11}
X_3	3.10^{-14}	3.10^{-13}

Tableau 2 : Comparaison entre l'approche télégraphiste et l'approche infinitésimale.

4.4.2. Pertinence de la compensation YZ

La caractérisation d'une ligne de transmission fait intervenir, nous l'avons vu, la méthode des paramètres YZ afin de supprimer l'effet des plots de contacts. Certains auteurs, tel que T. Winkel *et al.* [48], ont développé des méthodes plus complexes (mais également plus lourdes à mettre en place) afin de caractériser finement ces derniers. Il convient donc de s'assurer que notre étape de compensation est suffisante, c'est-à-dire qu'elle conduit à une détermination précise des paramètres Z_c et γ de la ligne. Nous confrontons, dans ce but, notre méthode d'extraction à une technique de caractérisation radicalement différente. Cette dernière permet uniquement l'extraction du coefficient de propagation complexe, ce qui limite la portée du test à ce seul paramètre.

Il est en effet possible de déterminer, d'après les mesures brutes de deux lignes coplanaires $[L_1]$ et $[L_2]$, leur coefficient de propagation complexe. Les lignes, de longueurs respectives l_1 et l_2 , doivent bien évidemment avoir la même largeur et le même espacement au plan de masse. Le coefficient extrait, noté γ , constitue une référence à laquelle nous pouvons opposer les résultats donnés par la procédure développée en 4.2.4.

- Si la diaphonie entre les ports d'entrée et de sortie est négligeable et si la reproductibilité du contact à l'interface sonde-plot est assurée lors de la mesure, on peut retenir le même modèle d'erreurs pour chacune des lignes de transmission. Ce dernier, représenté Figure 22, est très général puisqu'il n'y a aucune condition relative aux quadripôles d'erreurs $[E_1]$ et $[E_2]$. On peut écrire en formalisme ABCD :

$$\begin{cases} [L_1] = [E_1] \cdot [L_1^{\text{compensé}}] \cdot [E_2] \\ [L_2] = [E_1] \cdot [L_2^{\text{compensé}}] \cdot [E_2] \end{cases} \quad (4.27)$$

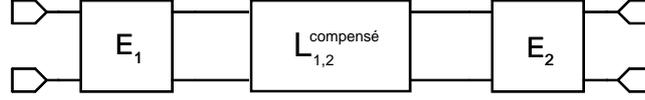


Figure 22 : Modélisation des lignes de transmission et de leur motif de mesure.

- En combinant les deux équations ci-dessus, H. Heuermann *et al.* [49] ont établi l'égalité :

$$[P] = [L_2] \cdot [L_1]^{-1} = [E_1] \cdot [\Delta L] \cdot [E_1]^{-1} \quad \text{où :} \quad (4.28)$$

$$[\Delta L] = \begin{bmatrix} \text{ch}(\gamma_r \cdot \Delta l) & Z_c \cdot \text{sh}(\gamma_r \cdot \Delta l) \\ \text{sh}(\gamma_r \cdot \Delta l)/Z_c & \text{ch}(\gamma_r \cdot \Delta l) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta l = l_2 - l_1 \quad (4.29)$$

- La matrice $[E_1]$ est régulière et par conséquent les matrices $[P]$ et $[\Delta L]$ sont similaires [50]. Les traces de chaque matrice [51], définies comme la somme des éléments diagonaux, sont alors égales.

$$\text{Trace}\{[P]\} = 2 \cdot \text{ch}(\gamma_r \cdot \Delta l) \quad (4.30)$$

- Le problème du choix de la solution, lié à la fonction non bijective cosinus hyperbolique (ch), apparaît de nouveau (§ 4.2.4.1). Le coefficient γ_r physique est retenue à l'aide du critère établi par J. Mondal [52].

$$\gamma_r = \frac{1}{\Delta l} \cdot \text{arcch}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\Delta l} \cdot \ln\left(\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - 1}\right) \quad \text{où} \quad A = \text{Trace}\{[L_2] \cdot [L_1]^{-1}\} \quad (4.31)$$

Le résultat est dès lors immédiat, et l'on vérifie que l'expression du coefficient de propagation complexe ne fait intervenir que la mesure brute. Nous comparons, Figure 23, le coefficient de propagation complexe γ extrait à l'aide de la méthode télégraphiste et le coefficient γ_r issu de cette méthode, qualifiée de directe. La première ne requiert qu'une ligne coplanaire, et nous retenons une ligne de longueur 2 mm, de largeur et d'espacement au plan de masse de 20 μm . La ligne supplémentaire nécessaire à la seconde méthode a pour longueur 1 mm. Si les deux méthodes donnent des résultats similaires en ce qui concerne le coefficient de propagation réel (β) avec un écart moyen de l'ordre de 1 %, il n'en est pas de même pour le coefficient d'atténuation (α), pour lequel l'écart moyen atteint 38 %.

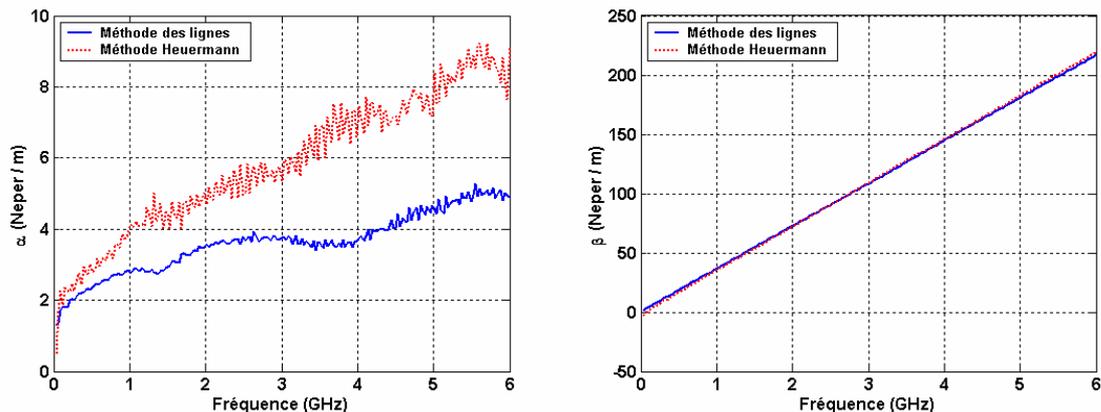


Figure 23 : Coefficient de propagation extrait d’après l’approche télégraphiste et l’approche directe.

Les différences persistent lorsque l’on confronte, Tableau 3, les schémas électriques équivalents à une ligne de longueur 1 mm, reconstruite d’après γ et γ_r . Les écarts observés sur les conductances G_1 et G_2 ainsi que sur la résistance R_3 , toutes liées aux pertes résistives, sont très importants. Nous excluons dès à présent de l’analyse la conductance. Cette décision paraîtra sans doute arbitraire à ce stade mais sera pleinement justifiée au vu de l’argumentaire développé au prochain paragraphe. Les résultats sur R_3 sont quelques peu déroutants et semblent jeter le doute quant au bien-fondé de notre méthode d’obtention du coefficient de propagation complexe. En effet, l’extraction du coefficient de propagation d’après H. Heuermann est directe, au sens où elle n’implique pas de méthodes de compensation, ce qui nous a conduit à retenir γ_r comme référence. Cependant, la qualité du contact à l’interface sonde-plot influe en premier lieu sur les pertes résistives mesurées et l’on peut s’interroger, en conséquence, sur la pertinence de notre hypothèse relative à la reproductibilité des contacts, hypothèse intrinsèque à la technique d’extraction directe.

Paramètres électriques	Ecart moyen (%)	Ecart maximal (%)
G_1, G_2	129	248
B_1, B_2	1,11	2,60
R_3	21,9	60,5
X_3	1,11	5,81

Tableau 3 : Comparaison entre l’approche télégraphiste et l’approche directe.

La Figure 24 représente l’évolution de la résistance série R_3 avec la fréquence. Elle fait clairement apparaître que l’approche de H. Heuermann ne permet pas une modélisation correcte des pertes en DC, contrairement à la méthode des télégraphistes. On prend ici conscience de toute l’importance de la reproductibilité des contacts qui, si elle n’est pas assurée, peut conduire à des résultats aberrants. Cette propriété est, entre autres, conditionnée par la planéité de la plaquette, l’encrassement des pointes au moment de la mesure ou encore l’état d’oxydation du contact. Elle n’est vérifiée que très localement et nos résultats peuvent s’expliquer par le fait que les deux lignes

utilisées pour l'extraction de γ_r n'ont pas la même position sur la plaquette. Nous écartons donc de l'analyse la grandeur R_3 pour ne retenir que la réactance X_3 . Nous concluons alors que les deux méthodes sont en accord, ce qui laisse entendre que la méthode de compensation YZ est suffisante.

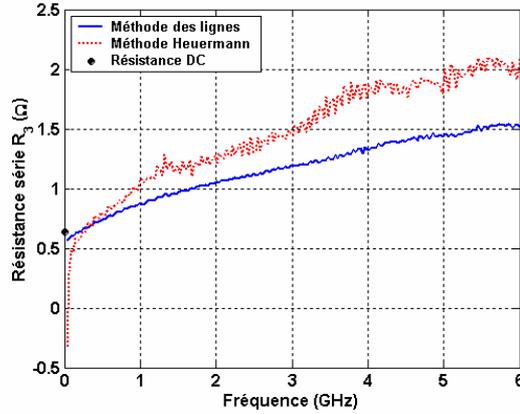


Figure 24 : Evolution de R_3 avec la fréquence pour les deux techniques d'extraction.

4.4.3. Précision de la caractérisation des accès

La procédure que nous proposons afin d'estimer la précision de la modélisation des lignes d'accès nécessite trois lignes coplanaires (L_1 , L_2 et L_3) de largeur W , d'espacement au plan de masse S , et de longueurs respectives 2 mm, 1 mm, 500 μm . La ligne la plus longue est retenue pour l'extraction des paramètres caractéristiques Z_c et γ . Les matrices chaînes des deux autres lignes sont déduites de (4.16). Ces résultats sont ensuite formatés, puis comparés aux mesures compensées par la méthode YZ des lignes L_2 et L_3 . Ce test est appliqué à des lignes aux géométries diverses, afin de couvrir au mieux l'ensemble des cas que nous sommes susceptibles de rencontrer. La largeur des pistes prend les valeurs discrètes {20, 30, 50, 80, 100} μm et l'espacement au plan de masse les valeurs {10, 20, 50, 100} μm . Chaque ligne est mesurée sur plusieurs réticules, ce qui permet de limiter les incertitudes. Les conclusions de cette étude sont résumées Figure 25 et Figure 26.

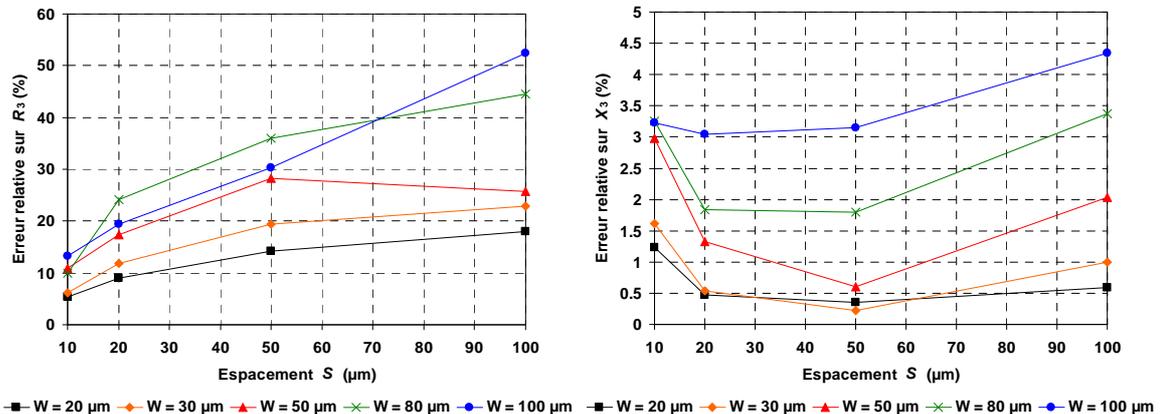


Figure 25 : Influence de l'espacement au plan de masse sur l'erreur de modélisation de R_3 et X_3 .

L'erreur relative reportée en ordonnée est la moyenne des erreurs relatives moyennes (cf. § 4.3) observées sur chacune des lignes L_2 et L_3 . Une ligne de transmission étant un composant symétrique, aucune distinction n'est faite, Figure 26, entre le port d'entrée et le port de sortie, ce qui explique la notation condensée (G et B). La première remarque qui peut être faite est que la précision de la caractérisation des lignes varie énormément d'un paramètre électrique à l'autre. Ainsi, si la réactance X_3 est très bien modélisée, puisque approchée à environ 2 %, il n'en est pas de même pour la résistance série R_3 avec une erreur commise dépassant 10 %. Ce résultat *a priori* très décevant est à relativiser... En effet, une piste L_3 ($l = 500 \mu\text{m}$) telle que $W = 100 \mu\text{m}$ présente à fréquence nulle une résistance d'environ $32 \text{ m}\Omega$, ce qui est très faible et donc difficile à mesurer avec précision. Il n'est donc pas mis en avant, dans ce cas précis, un défaut d'extraction des paramètres Z_c et γ mais plutôt les limites de l'appareillage de mesure. On vérifie d'ailleurs que l'erreur est d'autant plus importante que R_3 est faible, c'est-à-dire que la largeur des pistes W augmente. L'intérêt de réaliser l'extraction sur une ligne longue, aux caractéristiques appréciables, est dès lors évident.

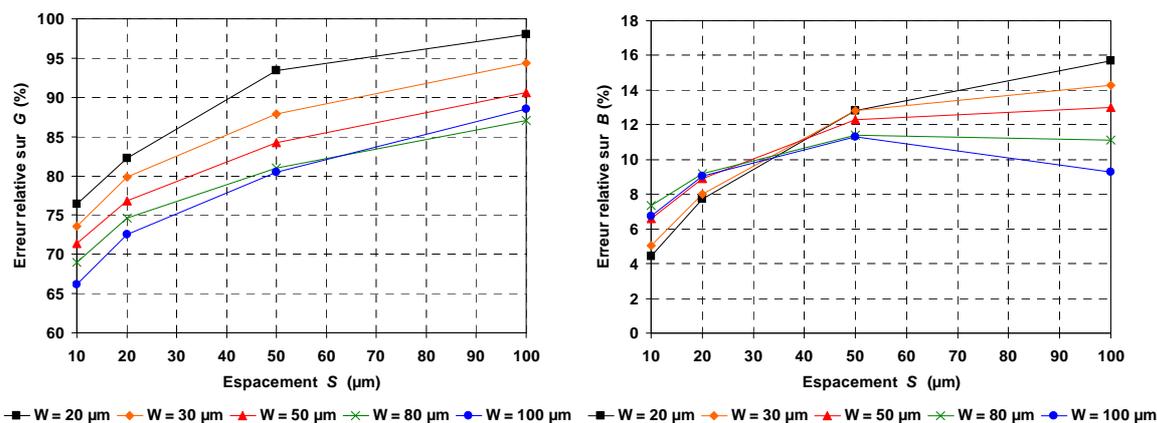


Figure 26 : Influence de l'espacement au plan de masse sur l'erreur de modélisation de G et B .

Le même argument peut être avancé afin de justifier les erreurs observées sur la conductance G . Les lignes coplanaires mesurées sont, en effet, déposées sur un substrat en verre, qui de fait présente d'excellentes propriétés isolantes. Les pertes dans le substrat, représentées en premier lieu par la conductance G , sont très faibles et par conséquent difficilement mesurables. L'étude qualitative des variations de l'erreur avec la géométrie est, à ce titre, riche en enseignements. Cette dernière est une fonction croissante de S et décroissante de W , ce que l'on peut interpréter de la manière suivante : la conductance est d'autant plus faible que l'espacement au plan de masse est plus important car la distance à parcourir par l'onde électromagnétique augmente. La conductance est également d'autant plus faible que les pistes sont plus fines car la surface offerte au substrat diminue. En conclusion, les erreurs observées sur G sont, encore une fois, plus révélatrices d'une

limitation de la capacité de mesure que d'une réelle lacune de la représentation. La détermination de la susceptance parallèle B d'une ligne est, quant à elle, entachée d'une imprécision de l'ordre de 10 %. Nous pouvons donc affirmer que la procédure d'extraction proposée, bien qu'élaborée, peut conduire à des erreurs non négligeables mais néanmoins acceptables.

Il est également possible de dégager de l'observation des courbes quelques règles de conception. Par exemple, l'erreur sur R_3 et B augmente avec S , pour atteindre des valeurs prohibitives au-delà de 50 μm . Nous éviterons donc, autant que possible, l'utilisation de lignes d'accès dont la distance au plan de masse dépasse cette valeur. Par contre, l'erreur sur la réactance X diminue jusqu'à $S \sim 50 \mu\text{m}$ pour croître de nouveau ensuite. Un bon compromis semble trouvé aux environs de $S \sim 20 \mu\text{m}$ et nous reportons Figure 27 les résultats correspondant à cet espacement.

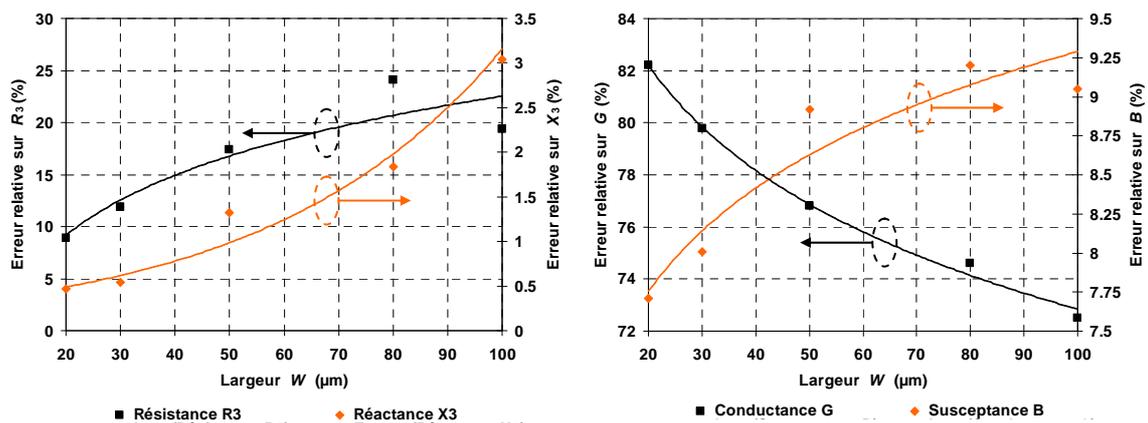


Figure 27 : Influence de la largeur de la piste W sur l'erreur de modélisation de la ligne pour $S = 20 \mu\text{m}$.

4.4.4. Comparaison à un étalon : le circuit ouvert

Nous pouvons difficilement, pour les raisons que nous avons déjà données dans l'introduction (§ 3.2), comparer, par rapport à un étalon, les résultats issus des différentes procédures de compensation. Ce problème est partiellement résolu en remarquant que le motif en circuit ouvert, nécessaire à toutes les méthodes de compensation conventionnelles, n'est en revanche pas utilisé par la méthode des lignes (**Li**). Le modèle d'erreurs associé, censé représenter le motif de mesure, doit en toute logique être capable de représenter le cas particulier du circuit ouvert. De cette assertion naît l'expérience qui consiste à comparer un circuit ouvert reconstruit d'après le modèle d'erreurs au standard mesuré.

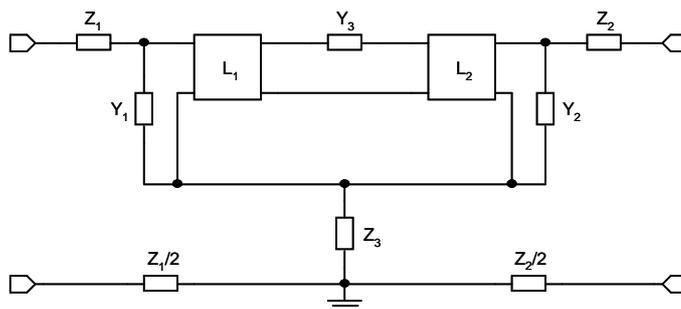


Figure 28 : Modèle du motif de mesure en circuit ouvert, méthode des lignes.

Le réseau électrique décrivant le circuit ouvert, Figure 28, est directement déduit du schéma établi dans le cadre de la méthode **Li** (cf. Figure 13). Nous reprenons à ce titre la nomenclature usitée tout au long du paragraphe 4.2 pour les différents éléments du modèle. La méthode **Li** dans sa version modifiée ne permet pas l'identification d'une admittance d'isolation Y_3 , qui par conséquent doit être négligeable devant l'admittance en transmission du composant à caractériser pour que la méthode soit applicable. Cette admittance est néanmoins nécessaire au calcul analytique de la matrice impédance $[Z_{co}]$, équivalente au modèle présenté. On démontre par passage à la limite ($Y_3 \rightarrow 0$) que l'expression de cette dernière s'écrit :

$$[Z_{co}] = \begin{bmatrix} \frac{Z_c}{Y_1 \cdot Z_c + \tanh(\gamma \cdot l_1)} + \frac{3}{2} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & \frac{Z_c}{Y_2 \cdot Z_c + \tanh(\gamma \cdot l_2)} + \frac{3}{2} Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Un motif de mesure est défini par quatre variables géométriques : l'encombrement du composant (R_e), la longueur des lignes d'accès au port d'entrée (l_1) et de sortie (l_2), et enfin la dimension du cadre (E). Toutes ces grandeurs sont reportées sur la Figure 29, qui représente le motif "ouvert" d'une inductance. Notre étude s'est focalisée sur ces structures de test car elles ont d'une part l'avantage d'être asymétriques et d'autre part d'être déposées sur substrat verre ce qui est le cas de la quasi totalité des composants passifs que nous avons eu à caractériser.

Des motifs aux géométries aussi diverses que variées doivent être testés si l'on désire aboutir à des résultats généraux. Nous avons donc traité, dans cette optique, un ensemble (noté Λ) de 57 motifs d'inductances en circuit ouvert dont les caractéristiques balayent notre domaine de travail. La plage de variation de chaque paramètre est spécifiée dans le tableau accompagnant la Figure 29. Il est à noter que, comme dans le cas des lignes coplanaires, chaque motif est répliqué trois fois par plaquette et que chaque réticule est mesuré afin d'en déduire une mesure moyenne, en vue de minimiser l'effet d'inévitables erreurs de mesure.

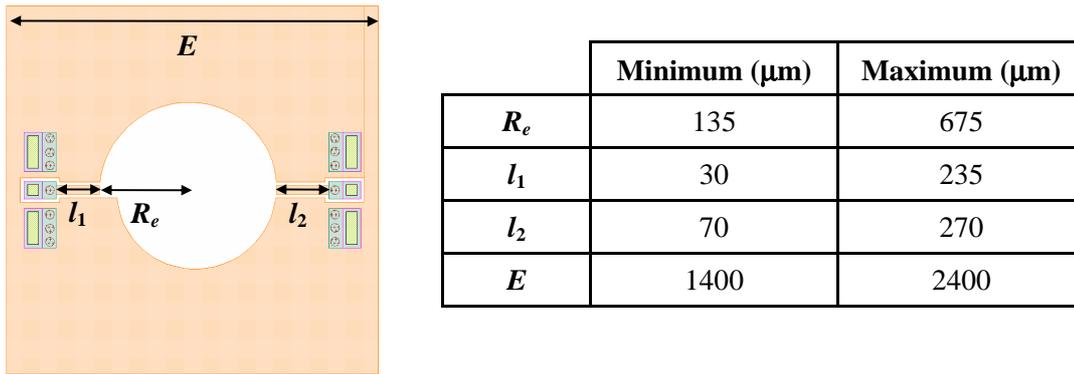


Figure 29 : Paramètres géométriques définissant le motif circuit ouvert et leurs plages de variation.

Les standards employés par la méthode **Li** n'autorisent pas l'identification de l'admittance Y_3 , représentant la transmission entre les ports d'entrée-sortie. De plus, les résultats sur la conductance ne sont pas exploitables pour les raisons développées au paragraphe précédent. En conséquence, seules sont présentées, Figure 30, les différences observées sur les pertes diélectriques. Un substrat semi-conducteur, du silicium dopé par exemple, serait sans aucun doute un bien meilleur candidat à l'évaluation de la capacité du modèle d'erreurs à représenter les pertes ohmiques dans le substrat.

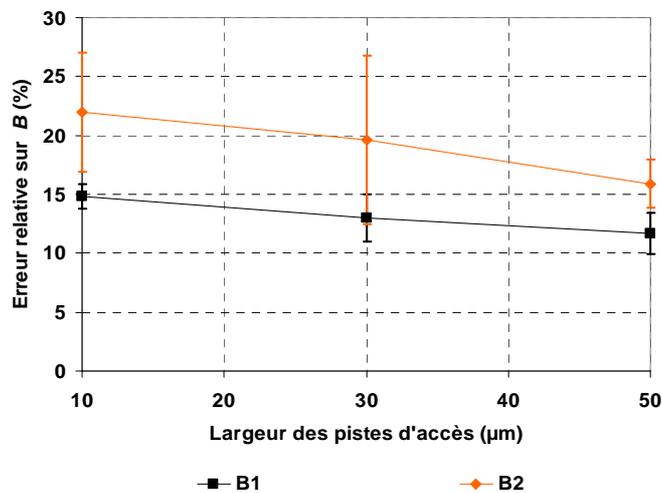


Figure 30 : Evolution de l'erreur relative sur la susceptance avec la largeur des pistes d'accès.

Les résultats, peu dispersés, sont concluants puisque l'erreur moyenne sur B qui est égale à 13 % au port d'entrée, n'excède pas 20 % au port de sortie. Cette dissymétrie s'explique simplement du fait que la ligne d'accès au port de sortie est plus longue qu'au port d'entrée. Peut-on imputer ces erreurs aux effets de rayonnement en bout de ligne que le modèle ne prend pas en compte ? On répond à cette question par la négative car le modèle d'erreurs aurait dans ce cas tendance à sous-estimer la valeur de la susceptance, ce qui est infirmé par l'expérience.

4.5. Estimation de la précision des mesures

Le calibrage du banc hyperfréquence est contrôlé en mesurant de nouveau les standards étalons. Il s'agit donc plus d'une vérification de cohérence que d'une véritable validation. Les résultats obtenus pour chaque étalon doivent approcher le modèle associé à 20 % environ. Ce critère peut sembler bien lâche mais il nous est apparu difficile d'obtenir une meilleure reproductibilité. Il est donc primordial de quantifier l'impact de l'erreur de calibrage sur la précision des mesures. Nous évaluerons dans un premier temps l'incertitude sur la détermination des paramètres de dispersion. La documentation de l'analyseur fournit à cet effet des équations de calcul d'incertitude [53] intégrant les erreurs systématiques résiduelles ainsi que les erreurs aléatoires. Ce modèle, très complet puisqu'il comporte 26 variables, est néanmoins difficile à renseigner et nous lui préférons une approche expérimentale. Ensuite, nous tenterons de mesurer l'effet de la propagation de l'incertitude de calibrage lors de l'étape de compensation, afin d'en déduire, pour chaque méthode, une précision sur les paramètres électriques extraits. Cette incertitude expérimentale constituera par la suite le critère objectif nous permettant de juger de la qualité d'un modèle. Enfin, nous comparerons les méthodes de compensation entre elles dans le but d'évaluer les performances de la méthode des lignes, que nous avons développée.

4.5.1. Incertitudes liées au calibrage

La manière la plus simple d'estimer l'incertitude introduite par la procédure de calibrage est encore de comparer les mesures de dispositifs obtenues d'après plusieurs calibrages. Cette incertitude est évidemment fonction du dispositif mesuré et il est important de couvrir un spectre comportemental aussi large que possible. Ainsi, nous remplaçons l'analyse de la fonction liant l'incertitude à la mesure par un examen statistique. L'étude réalisée porte sur des résistances et des lignes aux géométries diverses, ainsi que sur les motifs de compensation qui leur sont associés. Les graphiques de la Figure 31 et de la Figure 32 donnent les variations relatives observées sur les paramètres de dispersion entre deux étalonnages retenus comme valides. Ces écarts ont été calculés d'après l'équation (4.21). Nous travaillons sur un ensemble comprenant 10 charges et 5 lignes répliquées 3 fois sur la plaquette. La déviation standard figure sur chaque histogramme, ceci dans le but d'estimer la dispersion statistique des résultats.

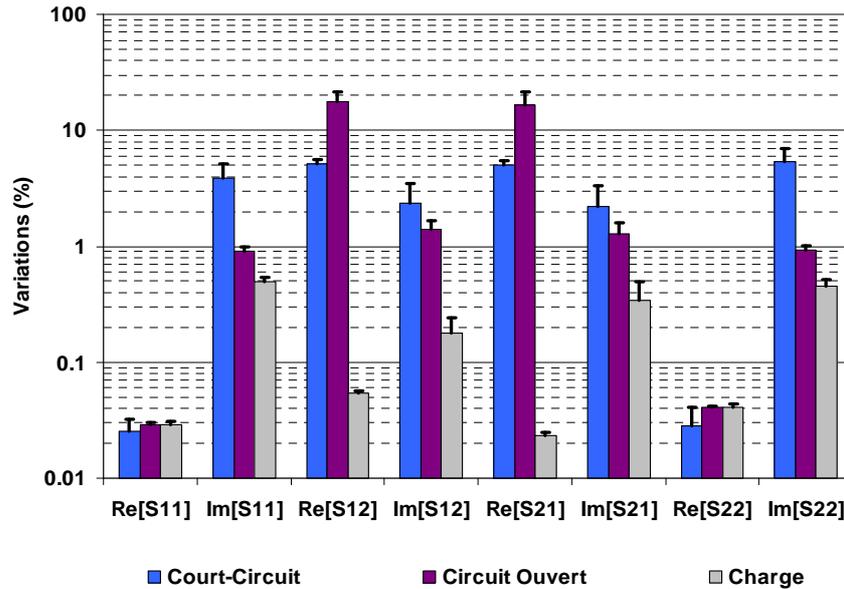


Figure 31 : Incertitudes sur les paramètres S pour différentes charges, ainsi que pour leurs motifs associés.

On remarque que les variations sur les paramètres S , d'un calibre à l'autre, sont loin d'être négligeables. Elles sont d'autant plus grandes que le paramètre correspondant est faible, tout simplement parce qu'il est alors plus difficile de le mesurer avec précision. Ainsi par exemple, les plus fortes variations relatives au circuit ouvert dépassent allègrement 10 %. Elles concernent les paramètres de transmission S_{12} et S_{21} qui seraient exactement nuls dans l'hypothèse d'un circuit ouvert idéal. L'incertitude sur les paramètres S_{12} et S_{21} du circuit ouvert est d'ailleurs plus importante pour la ligne que pour la charge. En effet, les plots de contacts sont plus éloignés dans le premier cas, ce qui se traduit par un couplage entre le port 1 et le port 2 plus faible.

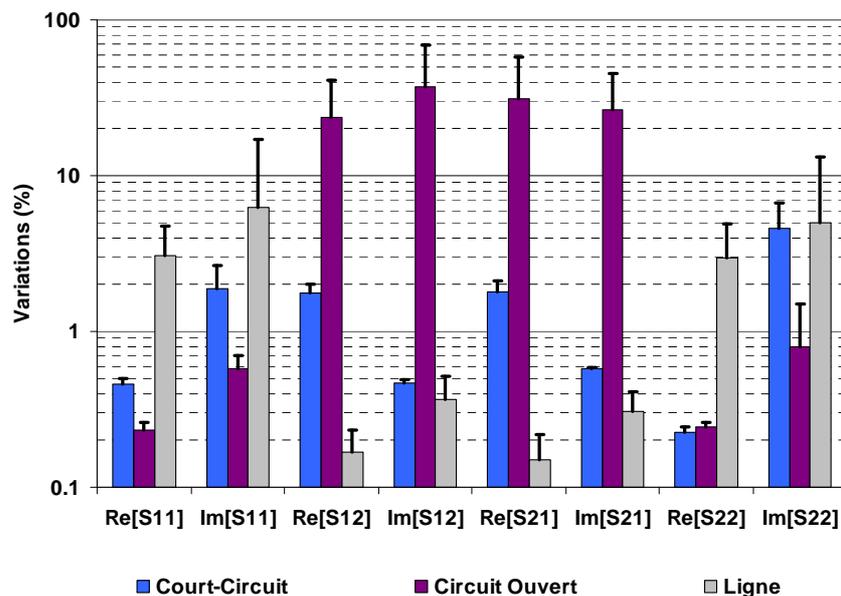


Figure 32 : Incertitudes sur les paramètres S pour différentes lignes, ainsi que pour leurs motifs associés.

L'évaluation de l'incertitude introduite par l'étape de calibrage est en soit une information intéressante, elle n'en demeure pas moins insuffisante. En effet, si nous avons une idée de l'influence du calibrage sur la mesure avant la compensation, il nous reste à déterminer quelle est la sensibilité des méthodes de compensation vis-à-vis du calibrage. Pour cela, l'incertitude liée au calibrage SOLT est tout d'abord estimée en retenant pour chaque standard le maximum des variations observées sur l'ensemble testé. Les résultats, consignés dans le Tableau 4, ont été arrondis à la demi décade près ; une précision plus importante serait en effet excessive étant donnée la taille de l'ensemble d'évaluation.

	Re[S₁₁], Re[S₂₂] (%)	Re[S₁₂], Re[S₂₁] (%)	Im[S₁₁], Im[S₂₂] (%)	Im[S₁₂], Im[S₂₁] (%)
Charge	0,05	0,05	1	1
Circuit ouvert	0,05	50	1	5
Court-circuit	0,1	10	10	5
Ligne	10	1	50	1
Circuit ouvert	0,5	100	5	100
Court-circuit	1	5	10	1

Tableau 4 : Incertitude sur le calibrage SOLT.

4.5.2. Sensibilité des méthodes de compensation

L'incertitude sur les paramètres de dispersion (S) n'est pas constante et dépend de la valeur du paramètre S considéré. La distribution statistique de l'incertitude adjointe à chaque référent comportemental nous est également inconnue. Une détermination précise nécessiterait d'ailleurs un nombre d'échantillons bien trop grand et dont nous ne disposons pas, vu le nombre de variables impliquées. Nous avons cependant pu glaner quelques renseignements sur les caractéristiques de chaque distribution, résumés dans le Tableau 4. L'étude précédemment menée a en effet conduit à une estimation, certes grossière mais néanmoins existante, de la plage de variation relative associée à chacun des paramètres S propres à un standard. Plaçons-nous dans le cas défavorable d'une distribution uniforme : l'incertitude relative associée à la mesure d'un paramètre S d'un standard donné décrit uniformément la plage de variation qui lui correspond dans le Tableau 4. Un exemple s'impose afin d'éclairer des propos somme toute plutôt obscurs. Ainsi, nous supposons que l'incertitude sur le paramètre $\text{Re}[S_{12}]$ du court-circuit de la ligne est uniformément répartie sur l'intervalle $[-5\%, +5\%]$.

Cette dernière remarque nous permet de réaliser une analyse Monte Carlo [54,55], dans sa version la plus simple. En remarquant que les référents comportementaux que nous avons étudiés

sont également les standards intervenant dans les différentes méthodes de compensation, un ensemble d'expériences virtuelles est réalisé. Une expérience consiste à ajouter une incertitude – un "bruit" en quelque sorte – sur la mesure d'une charge donnée ainsi que sur la mesure des standards nécessaires à la compensation, pour ensuite comparer ces résultats à la mesure non bruitée. Nous retenons pour cette étude de sensibilité l'ensemble d'inductances Λ introduit au paragraphe 4.4.4. Pour chaque inductance, 100 expériences sont réalisées. La Figure 33 et la Figure 34 représentent, respectivement dans le cas typique et le pire cas, les variations relatives observées pour chacun des paramètres électriques issus de la mesure après compensation.

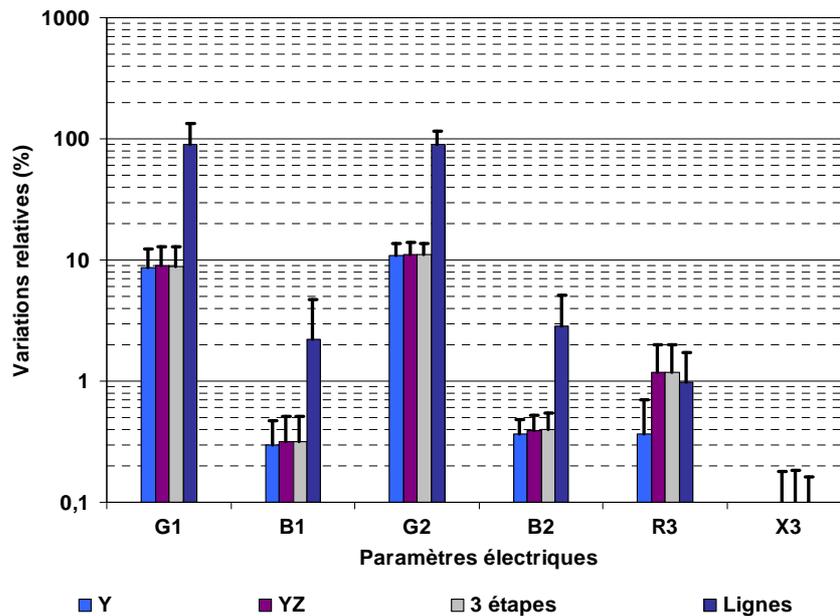


Figure 33 : Effet de l'incertitude du calibrage sur les paramètres électriques après compensation (cas typique).

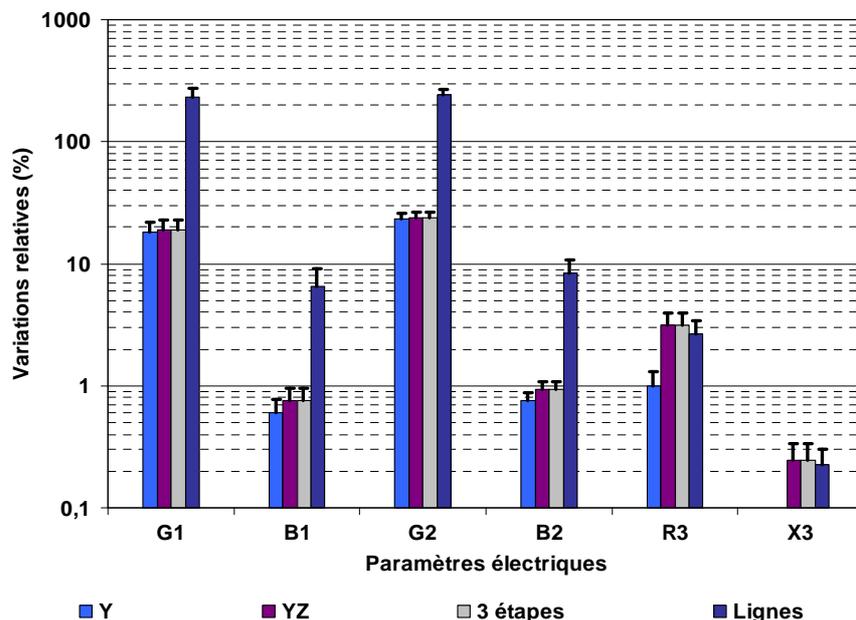


Figure 34 : Effet de l'incertitude du calibrage sur les paramètres électriques après compensation (pire cas).

La méthode des lignes est équivalente aux autres méthodes en ce qui concerne la transmission entre les deux ports, électriquement représentée par R_3 et X_3 . Elle est, par contre, beaucoup plus sensible au calibrage si l'on considère les paramètres G et B décrivant le couplage au plan de masse. Les différences, particulièrement marquées, peuvent s'expliquer du fait que la méthode **Li** implique un nombre de standards plus important ce qui augmente les sources d'erreurs potentielles. Notons que, quelle que soit la méthode retenue, la sensibilité de la conductance G est telle qu'il nous faut ici constater l'incapacité de notre banc de test à mesurer correctement ce paramètre. Cette sensibilité exacerbée ne reflète d'ailleurs que la difficulté inhérente à la caractérisation des pertes résistives d'un substrat diélectrique. Ceci est loin d'être inquiétant car sans incidence sur le résultat final. La conductance (G) est en effet négligeable devant la susceptance (B). La conductance G se voit être, pour toutes ces raisons, exclue des modèles à venir.

Epilignons avec la détermination des incertitudes expérimentales grâce aux résultats de la Figure 34, correspondant au pire cas observé sur l'ensemble d'étude. Celles-ci sont résumées dans le Tableau 5. Elles montrent clairement que la méthode **Li** n'est pas instable et peut être comparée aux autres méthodes, ce qui constitue une validation partielle. D'une manière générale, nous ne chercherons pas dans ce qui suit à obtenir une précision de nos modèles en deçà de 4% sur la résistance série d'une inductance et 0,3 % sur la réactance série. Cette incertitude sur X_3 se traduit également par une incertitude de 0,3 % sur l'inductance série.

Paramètres électriques	Méthodes existantes (%)	Méthode des lignes (%)
B_1, B_2	1	10
R_3	4	4
X_3	0,3	0,3

Tableau 5 : Incertitude sur les paramètres électriques après compensation.

4.6. Comparaison des méthodes de compensation

La Figure 35, ci-dessous, représente les variations relatives observées sur les paramètres électriques $\{B_1, B_2, R_3, X_3\}$ d'une méthode de compensation à l'autre. Celles-ci sont classées par complexité croissante, une méthode étant d'autant plus complexe que son modèle comprend de paramètres. Cette étude est une fois de plus réalisée sur l'ensemble d'inductances Λ afin d'évaluer les performances de chaque méthode sur des motifs de test aux géométries variées. Toutes les méthodes présentées ont été longuement éprouvées par la pratique (ou dérivent de telles méthodes), et l'on peut par conséquent raisonnablement penser que tous les modèles impliqués sont partiellement représentatifs. Une analyse trop rapide nous conduirait cependant à en déduire qu'une

technique de compensation est d'autant plus précise que le modèle associé est plus élaboré. Mais nous avons démontré au cours de ce chapitre que la détermination des éléments d'un modèle est entachée d'erreurs, ce qui pénalise les méthodes trop complexes. Nous nous limiterons donc au commentaire de l'évolution des différents paramètres électriques avec la complexité du modèle. En particulier, les résultats donnés par la méthode des lignes seront comparés à ceux fournis par les autres méthodes, sans pour autant parler de gain en précision.

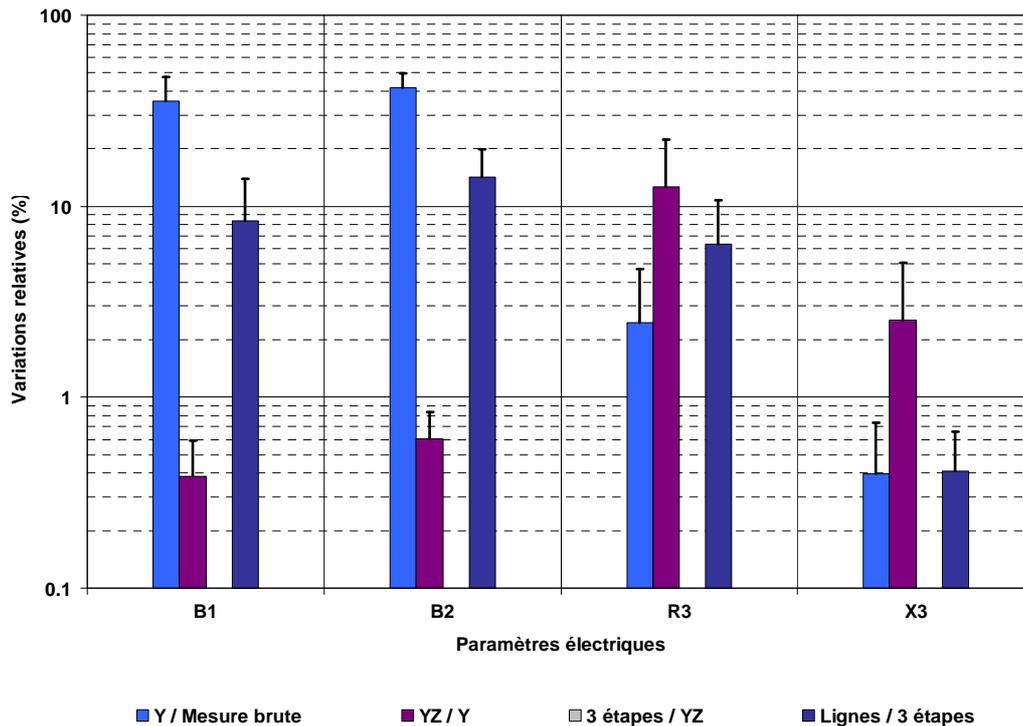


Figure 35 : Etude comparée des méthodes de compensation.

On vérifie que la méthode Y ne joue en premier lieu que sur les paramètres de couplage à la masse B_1 et B_2 . La méthode YZ influe au premier ordre sur R_3 et X_3 et ne modifie que très peu les résultats sur B_1 et B_2 en comparaison de la méthode Y. Nous pouvons également affirmer que la méthode "3 étapes" est, dans nos conditions d'étude, parfaitement équivalente à la méthode YZ. Les écarts relatifs observés sont en effet inférieurs à 0,1 % quel que soit le paramètre électrique considéré. Rappelons que ces deux méthodes ne diffèrent que de par la position dans le circuit de l'admittance d'isolation Y_3 , ce que soulignent la Figure 9 et la Figure 11. La convergence des résultats s'explique en remarquant que l'admittance Y_3 peut être négligée dans le cas d'inductances spiralées déposées sur un substrat en verre. Il n'a donc rien d'étonnant à ce que la compensation soit indépendante de la position de celle-ci. On valide ici, pour le composant que nous allons étudier par la suite, l'une des hypothèses à la base de la méthode **Li**.

Les variations relatives entre la méthode des lignes et la méthode "3 étapes" sont en moyenne d'environ 10 % sur B , 3 % sur R_3 et 0,3 % sur X_3 . Il est intéressant de constater que ces différences peuvent être justifiées par la seule incertitude expérimentale associée à la méthode des lignes (*cf.* Tableau 5). Les causes de ces écarts sont néanmoins vraisemblablement multiples et impliquent très probablement certaines lacunes de modélisation précédemment constatées. L'omission du couplage Y_3 , intrinsèque à la méthode **Li**, ainsi que l'erreur de modélisation des lignes d'accès mise en évidence au paragraphe 4.4.3 ont sans aucun doute quelques conséquences sur les composantes R_3 et X_3 . Le défaut de modélisation du circuit ouvert (§ 4.4.4) n'est quant à lui pas étranger aux écarts observés sur la susceptance B . Ces "erreurs" ne sont cependant pas rédhibitoires et nous concluons en notant que les résultats obtenus par la méthode des lignes et par les méthodes conventionnelles sont concordants.

5. Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre les composantes principales de notre banc de mesures ainsi que les principales sources d'erreurs qu'il introduit. Parmi celles-ci se distinguent les erreurs systématiques qui peuvent être corrigées lors de l'étape de calibrage à l'aide de la mesure de standards aux caractéristiques connues. La méthode de calibrage SOLT ("Short Open Load Thru") a été sélectionnée, car elle donne des résultats satisfaisants pour nos fréquences de travail qui sont, pour l'instant, inférieures à 6 GHz.

Nous avons également présenté les techniques d'épluchage couramment utilisées en mesure hyperfréquence : la méthode des paramètres Y , des paramètres YZ et enfin la méthode "3 étapes". Toutes nécessitent plusieurs motifs de test par composant, ce qui nous a amené à développer une méthode plus économique : la méthode des lignes. Elle utilise un motif de mesure en court-circuit ainsi qu'une ligne de transmission, accompagnée de ses motifs de compensation. Ces standards renseignent un modèle d'erreurs à sept paramètres. Nous nous sommes employés à mettre en évidence à travers différents tests, et sur un ensemble de composants aux caractéristiques diverses, les performances mais également les limites de la modélisation retenue. La méthode des lignes donne des résultats comparables aux méthodes existantes tout en employant dans sa version actuelle un motif de moins par composant, soit une économie de surface de 33 %. Au cours de cette étude, la reproductibilité des contacts s'est révélée être un critère déterminant, car elle reste malheureusement difficile à garantir. Les motifs relatifs à la ligne de transmission seront désormais embarqués sur chaque réticule afin que les contacts de la ligne puissent être assimilés aux contacts du motif de mesure. Il devrait alors être possible d'éviter l'utilisation du motif de mesure court-circuité, ce qui améliorera considérablement l'efficacité de la méthode.

Nous émettons quelques réserves quant à l'idée communément admise qu'un modèle de parasites est d'autant plus précis qu'il est élaboré. Une étude statistique nous a en effet permis d'apprécier la sensibilité des différentes méthodes de compensation aux erreurs résiduelles de calibrage. Il apparaît qu'elle est directement liée au nombre de motifs employés, qui augmente inévitablement avec la complexité du modèle retenu pour représenter l'environnement de mesure. Cette étude débouche en outre sur une estimation de la précision avec laquelle nous pouvons espérer extraire les paramètres électriques qui constitueront la référence expérimentale de nos modèles. Notons en particulier, que pour toutes les méthodes de compensation évaluées, l'incertitude expérimentale relative à la résistance série est d'environ 4 % alors qu'elle n'est que de 0,3 % sur l'inductance série.

En conclusion, si nous avons pu vérifier que la méthode des lignes donnait des résultats en accord avec les méthodes existantes, il reste somme toute quelques interrogations à lever avant sa complète qualification. Pour cette raison nous utiliserons dans ce qui suit la méthode plus simple mais plus éprouvée des paramètres YZ.

Références

- [1] **Hewlett Packard**, "The TRL Calibration Procedure", *User's Guide HP 8753E Network Analyzer*, February 1999, Chapter 6, pp. 92 – 99.
- [2] **S. Osofsky, S. Schwartz**, "Design and Performance of a Non-Contacting Probe for Measurements on High-Frequency Planar Circuits", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 40, n° 8, August 1992, pp. 1701 – 1708.
- [3] **B. Leslie, F. Matta**, "Membrane Probe Card Technology", *IEEE International Test Conference*, 1988, pp. 601.
- [4] **B. Buck, I. Eddison**, "Microwave Probe System Tests GaAs MMICs", *New Electronics*, October 1986, pp. 34 – 37
- [5] **D. Erickson**, "Air Coplanar Probe Aids MMIC Testing", *Microwaves & RF*, April 1994, pp. 202 – 203.
- [6] **E. Godshalk, J. Burr, J. Williams**, "An Air Coplanar Wafer Probe", *43rd Automatic Radio Frequency Techniques Group Conference Digest*, Spring 1994, pp. 70 – 75.
- [7] **Cascade Microtech**, "Air Coplanar Probe Series", *Data sheet ACP-DS-1000*.
- [8] **J.-L. Carbonéro, G. Morin, B. Cabon**, "Comparison Between Beryllium-Copper and Tungsten High Frequency Air Coplanar Probes", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, n° 12, December 1995, pp. 2786 – 2793.
- [9] **J. Logan**, "Materials Technology and Applications of Microelectronic Probes", *Proceeding SAMPLE Electron Conference*, June 1991, pp. 559 – 568.
- [10] **R. Malucci**, "Dynamic Model of Stationary Contacts Based on Random Variations of Surface Features", *Proceeding IEEE Holm Conference Electrical Contacts*, 1991, pp. 90 – 101.
- [11] **B. Donecker**, "Determining the Measurement Accuracy of the HP 8510 Microwave Network Analyzer", *23rd Automatic Radio Frequency Techniques Group Conference Digest*, Spring 1984, pp. 51 – 84.
- [12] **R. Speciale**, "A Generalization of the TSD Network Analyzer Calibration Procedure, Covering n-Port Scattering-Parameter Measurements, Affected by Leakage Errors", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 25, n° 12, December 1977, pp. 1100 – 1115.

- [13] **E. Da Silva, M. Mac Phun**, "Calibration of Microwave Network Analyzer for Computer Corrected S-Parameter Measurements", *IEEE Electronics Letters*, Vol. 9, n° 6, March 1973, pp. 126 – 128.
- [14] **H. Heuermann, B. Schiek**, "15-Term Self-Calibration Methods for the Error-Correction of On-Wafer Measurements", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 46, n° 5, October 1997, pp. 1105 – 1110.
- [15] **J. Butler, D. Rytting, M. Iskander, R. Pollard, M. Vanden Bossche**, "16-Term Error Model and Calibration Procedure for On-Wafer Network Analysis Measurements", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, n° 12, December 1991, pp. 2211 – 2216.
- [16] **J. Fitzpatrick**, "Error Models for Systems Measurement", *Microwave Journal*, n° 5, May 1978, pp. 63 – 66.
- [17] **Hewlett Packard**, "Characterizing Microwave Systematic Errors", *User's Guide HP 8753E Network Analyzer*, February 1999, Chapter 6, pp. 61 – 71.
- [18] **K. Silvonen**, "Calibration of Test Fixtures Using at Least Two Standards", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, n° 4, April 1991, pp. 624 – 630.
- [19] **G. Engen, C. Hoer**, "Thru-Reflect-Line: An Improved Technique for Calibrating the Dual Six-Port Automatic Network Analyzer", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 27, n° 12, December 1979, pp. 987 – 993.
- [20] **J. Barr, M. Pervere**, "A Generalized Vector Network Analyzer Calibration Technique", *34th Automatic Radio Frequency Techniques Group Conference Digest*, December 1989, pp. 51 – 60.
- [21] **Cascade Microtech**, "ISS Series of Impedance Standard Substrates", *Data sheet ISS-DS-0602*.
- [22] **M. Steer, S. Goldberg, G. Rinne, P. Franzon, I. Turlik, J. Kasten**, "Introducing the Through-Line De-Embedding Procedure", *IEEE 1992 Microwave Theory and Techniques Symposium Digest*, 1992, pp. 1455 – 1458.
- [23] **D. Williams, R. Marks**, "Accurate Transmission Line Characterization", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 3, n° 8, August 1993, pp. 247 – 249.
- [24] **A. Safwat, L. Hayden**, "Sensitivity Analysis of Calibration Standards for SOLT and LRRM", *Cascade Microtech, Data sheet SOLT-LRRM-APP*.

- [25] **P. Crozat, J.-C. Hénaux, G. Vernet**, "Precise Determination of Open Circuit Capacitance of Coplanar Probes for On-Wafer Automatic Network Analyzer Measurements", *Electronics Letters*, Vol. 27, n° 16, August 1991, pp. 1476 – 1478.
- [26] **J.-L. Carbonéro**, "Développement des Méthodes de Mesures en Hyperfréquences sur Tranches de Silicium et Application à la caractérisation des Technologies CMOS et BiCMOS Sub-Microniques", *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, Chapitre 4, Avril 1996, pp. 125 – 156.
- [27] **A. Davidson, E. Strid, K. Jones**, "Achieving Greater On-Wafer S-Parameter Accuracy with the LRM Calibration Technique", *34th Automatic Radio Frequency Techniques Group Conference Digest*, December 1989, pp. 61 – 66.
- [28] **A. Davidson, E. Strid, K. Jones**, "LRM and LRRM Calibrations with Automatic Determination of Load Inductance", *36th Automatic Radio Frequency Techniques Group Conference Digest*, November 1990, pp. 146 – 155.
- [29] **T. Kolding**, "On-Wafer Calibration Techniques for Giga-Hertz CMOS Measurements", *Proceeding IEEE 1999 International Conference on Microelectronic Test Structures*, Vol. 12, March 1999, pp. 105 – 110.
- [30] **A. Fraser, R. Gleason, E. Strid**, "GHz On-Silicon Wafer Probing Calibration Methods", *IEEE Proceeding Bipolar Circuit and Technology Meeting*, September 1998, pp. 154 – 157.
- [31] **D. Frickey**, "Conversions Between S, Z, Y, h, ABCD, and T-Parameters which are Valid for Complex Source and Load Impedances", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 42, n° 2, February 1994, pp. 205 – 211.
- [32] **Agilent Technologies**, "S-Parameter Design", *Agilent Application Note AN154*, pp. 3.
- [33] **J.-L. Carbonéro**, "Développement des Méthodes de Mesures en Hyperfréquences sur Tranches de Silicium et Application à la caractérisation des Technologies CMOS et BiCMOS Sub-Microniques", *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, Annexe 1, Avril 1996, pp. 201 – 206.
- [34] **P. Van Wijnen, H. Claessen, E. Wolsheimer**, "A New Straightforward Calibration and Correction Procedure for On Wafer High Frequency S-Parameter Measurements (45 MHz – 18 GHz)", *1987 Bipolar Circuit and Technology Meeting Digest*, 1987, pp. 70 – 73.
- [35] **J. Hänseler, H. Schinagel, H. Zapf**, "Test Structures and Measurement Techniques for the Characterization of the Dynamic Behavior of CMOS Transistors on Wafer in the GHz

- Range", *Proceeding IEEE 1992 International Conference on Microelectronic Test Structures*, Vol. 5, March 1992, pp. 90 – 92.
- [36] **T. Kolding**, "Impact of Test-Fixture Forward Coupling on On-Wafer Silicon Device Measurements", *IEEE Transactions on Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 10, n° 2, February 2000, pp. 73 – 74.
- [37] **S. Lee, B. Ryum, S. Kang**, "A New Parameter Extraction Technique for Small-Signal Equivalent Circuit of Polysilicon Emitter Bipolar Transistors", *IEEE Transactions on Electron Devices*, Vol. 41, n° 2, February 1994, pp. 233 – 238.
- [38] **M. Koolen**, "On-Wafer High-Frequency Device Characterization", *Elsevier Microelectronic Engineering*, Vol. 19, 1992, pp. 679 – 686.
- [39] **H. Cho, D. Burk**, "A Three-Step Method for the De-Embedding of High-Frequency S-Parameter Measurements", *IEEE Transactions on Electron Devices*, Vol. 38, n° 6, June 1991, pp. 1371 – 1375.
- [40] **E. Vandamme, D. Schreurs, C. Van Dinther**, "Improved Three-Step De-Embedding Method to Accurately Account for the Influence of Pad Parasitics in Silicon On-Wafer RF Test-Structures", *IEEE Transactions on Electron Devices*, Vol. 48, n° 4, April 2001, pp. 737 – 742.
- [41] **T. Kolding**, "A Four-Step Method for De-Embedding GigaHertz On-Wafer CMOS Measurements", *IEEE Transactions on Electronic Devices*, Vol. 47, n° 4, April 2000, pp. 734 – 740.
- [42] **R. Mongia, I. Bahl, P. Bhartia**, *RF and Microwave Coupled-Line Circuits*, Boston: Artech House Publishers, pp. 66.
- [43] **V. Milanovic, M. Ozgur, D. De Groot, J. Jargon, M. Gaitan, M. Zaghloul**, "Characterization of Broad-Band Transmission for Coplanar Waveguides on CMOS Silicon Substrates", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 46, n° 5, May 1998, pp. 632 – 640.
- [44] **J. Lescot**, "Modélisation et Caractérisation de Composants passifs Intégrés sur Silicium pour Applications Radio-Fréquences", *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, Chapitre 4, Mai 2000, pp. 33 – 64.
- [45] **W. Eisenstadt, Y. Eo**, "S-Parameter-Based IC Interconnect Transmission Line Characterization", *IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, Vol. 15, n° 4, August 1992, pp. 483 – 490.

- [46] **E. Pettenpaul, H. Kapusta, A. Weisgerber, H. Mampe, J. Luginsland, I. Wolff**, "CAD Models of Lumped Elements on GaAs up to 18 GHz", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 36, n° 2, February 1988, pp. 294 – 304.
- [47] **W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery**, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, second edition, Cambridge University Press, 1992, Chapter 4, pp. 131 – 132.
- [48] **T. Winkel, L. Dutta, H. Grabinski**, "An Accurate Determination of the Characteristic Impedance of Lossy Lines on Chips Based on High Frequency S-Parameter Measurements", *IEEE 1996 Multi-Chip Module Conference*, February 1996, pp. 190 – 195.
- [49] **H. Heuermann, B. Schiek**, "Line Network Network (LNN): An Alternative In-Fixture Calibration Procedure", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 45, n° 3, March 1997, pp. 408 – 413.
- [50] **F. Gantmacher**, "Théorie des matrices, Tome I, Théorie générale", *Editions Jacques Gabay*, 1990, pp. 69 – 70.
- [51] **E. Weisstein**, "Trace (Matrix)", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Chapman & Hall*, pp. 1823.
- [52] **J. Mondal, T. Chen**, "Propagation Constant Determination in Microwave Fixture De-Embedding Procedure", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 36, n° 4, April 1988, pp. 706 – 714.
- [53] **Hewlett Packard**, "Measurement Uncertainty Equations", *User's Guide HP 8753E Network Analyzer*, February 1999, Chapter 10, pp. 8 – 12.
- [54] **B. Efron**, *The Jackknife, the Bootstrap, and Other Re-sampling Plans*, Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [55] **B. Efron, R. Tibshirani**, *Statistical Sciences*, Vol. 1, 1986, pp. 54 – 77.

Chapitre 2 :

Modélisation comportementale

"La méthode résolument empiriste adoptée est qualifiée par les physiciens de phénoménologique : elle ne se soucie pas d'expliquer les faits en les ramenant à des théories plus fondamentales, mais simplement de représenter les choses de façon aussi simple, économique, précise et ordonnée que possible."

B. Mandelbrot, "Fractales, hasard et finance".

1. Introduction	57
2. Les inductances intégrées	58
2.1. Réalisation technologique.....	58
2.2. Paramètres géométriques du modèle	59
3. La modélisation d'inductances spiralées.....	60
3.1. Les simulateurs électromagnétiques	60
3.2. Les modèles électriques segmentés	61
3.3. Les modèles électriques compacts	62
4. Structure du modèle comportemental.....	64
4.1. Représentation de la composante résistive	64
4.2. Représentation de la composante inductive	67
5. Corrélation à la géométrie.....	69
5.1. Expression analytique de R_{dc}	69
5.2. Expression analytique de R_{ep}	69
5.3. Expression analytique de L_{ac}	71
5.3.1. Modélisation du pont et des accès	72
5.3.2. Modélisation de la spirale	72
5.3.2.1 Modèles existants.....	72
5.3.2.2 Evaluation des modèles existants	73
5.3.2.3 Modèle développé.....	75
5.3.2.4 Validation du modèle développé	76
5.4. Expression analytique de L_{ep}	77
6. Confrontation à la mesure.....	78
7. Conclusion.....	80

1. Introduction

Le chapitre précédent a mis au jour les nombreuses difficultés liées à la métrologie Radio-Fréquence. Celle-ci fait appel, en réponse, à des techniques de correction élaborées, qui furent longuement étudiées afin d’asseoir sur des bases aussi saines que possible la modélisation consécutive. Si la qualification définitive du banc de mesures hyperfréquences n’est pas encore acquise – mais est-ce seulement possible ? –, l’ensemble des vérifications opérées nous permet néanmoins d’accorder un certain crédit – pour ne pas dire un crédit certain – à la procédure expérimentale établie. Mesure mille fois et coupe une seule fois dit un proverbe turc... Il est à présent temps de suivre cette maxime pour finalement passer à l’étape de modélisation en elle-même. La caractérisation précise d’une inductance nécessite aux Radio-Fréquences la prise en compte de phénomènes électromagnétiques tels que les couplages au substrat, l’effet de peau, les courants de Foucault. Ces phénomènes, beaucoup trop complexes pour être résolus analytiquement dans un cas concret, peuvent néanmoins être appréciés par une démarche expérimentale. Il serait d’ailleurs hasardeux de se lancer dans une étude théorique sans avoir réalisé au préalable cet indispensable travail de prospection.

L’objet de ce chapitre est de présenter une démarche de modélisation que l’on pourrait qualifier de démonstrative. Nous allons en effet tenter de vérifier s’il est possible de réaliser un modèle paramétré en fonction de la géométrie d’une inductance, d’après la mesure des caractéristiques d’un ensemble de composants, en vue d’une intégration dans une bibliothèque. Le modèle retenu est un circuit électrique comportant une cellule agencée en π , dont les éléments sont localisés et pour certains, variables en fonction de la fréquence f également. La modélisation de composants passifs porte actuellement en grande partie sur l’extraction de ce type de modèle car, quoique relativement simple structurellement, il reproduit fidèlement la réponse électrique observée, sous certaines hypothèses que nous allons détailler.

Après avoir succinctement décrit la structure d’une inductance intégrée, nous discuterons les différentes approches développées pour représenter son comportement dans le domaine RF, justifiant finalement le choix de notre modèle. Les différents paramètres qui le définissent seront alors présentés, et nous mettrons en particulier l’accent sur le lien intime qui les relie aux phénomènes physiques influant sur le comportement d’une inductance. Bien que chaque paramètre électrique ait été corrélé à la géométrie, seuls les résultats relatifs à l’impédance en transmission $Z(f)$ de l’inductance seront exposés en détail dans ce chapitre. Nous limitons ici la portée de l’étude à dessein, par souci de cohérence avec la suite du manuscrit. La modélisation de la résistance $R(f)$

et l'inductance équivalente $L(f)$ est en effet au centre de tout le travail réalisé, faisant l'objet de ce mémoire.

2. Les inductances intégrées

2.1. Réalisation technologique

Une inductance circulaire est, dans les grandes lignes, composée de trois conducteurs distincts : un enroulement spiralé, un pont souvent désigné par sa traduction anglaise "upperpass" et un plan de masse que l'on peut assimiler à une plaque. Elle est totalement définie à l'aide des paramètres géométriques suivants : la largeur de la piste W , l'épaisseur du dépôt T , la distance inter-spires S , le rayon interne R_{int} , le nombre de tours N_r , et enfin l'espacement au plan de masse S_g . La Figure 1 reproduit, à titre d'exemple, le schéma d'une inductance telle que $W = 50 \mu\text{m}$, $S = 50 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 150 \mu\text{m}$, $N_r = 5,5$, et $S_g = 200 \mu\text{m}$.

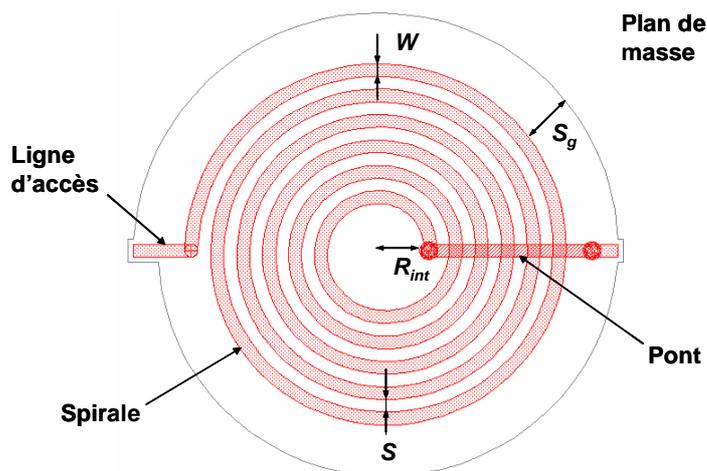


Figure 1 : Schéma d'une inductance spiralée.

Les inductances, intégrées sur un substrat en verre de $400 \mu\text{m}$ d'épaisseur, requièrent trois niveaux de métallisation, comme l'illustre la Figure 2. On a recours, pour réaliser la couche d'isolation entre chaque niveau, à un matériau diélectrique : le Benzo Cyclo-Butène (BCB). Ce polymère organique a été retenu car il présente une permittivité électrique faible, $\epsilon_r = 2,56$, diminuant ainsi l'intensité des couplages capacitifs au plan de masse. Il est, de plus, possible d'en déposer des couches relativement épaisses sans problème de passage de marche. Ainsi, les trois niveaux de BCB – indicés 1, 2, 3 sur le schéma ci-dessous – sont d'épaisseurs respectives $6 \mu\text{m}$, $10 \mu\text{m}$ et $6 \mu\text{m}$. Enfin, le BCB est photosensible, ce qui permet d'économiser certaines étapes de photolithographie. Notons que la couche de SiO_2 ($0,6 \mu\text{m}$), qui réalise l'interface entre le niveau BCB 1 et le substrat, ne s'impose pas dans ce cas précis mais intervient en revanche directement

dans le processus de fabrication de capacités intégrées. Le procédé technologique, brièvement décrit ici, est en effet commun à plusieurs filières : les inductances, les lignes coplanaires, les capacités, les résistances...

L'enroulement spiralé et le pont assurant le retour du courant depuis le centre de la spirale sont respectivement sur le premier et le second niveau métallique. Les couches, d'épaisseur $T = 3 \mu\text{m}$, sont en cuivre électrolytique. Ce métal a été préféré à l'aluminium, beaucoup plus usuel en microélectronique, car il présente de meilleures propriétés conductrices. Avec une conductivité de $\sigma = 5,26 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, presque 1,5 fois supérieure à celle de l'aluminium ($\sigma_{Al} = 3,54 \cdot 10^7 \text{ S/m}$), il permet d'atteindre des coefficients de qualité plus élevés. La conductivité du cuivre électrolytique reste néanmoins légèrement plus faible que celle du cuivre massif, $\sigma_{Cu} = 5,88 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, du fait du procédé de croissance. Le dernier niveau, en surface, est utilisé pour réaliser les plots de contacts nécessaires à la mesure. Il est composé d'un empilement de couches de titane (Ti), de nickel (Ni), et d'or (Au), conventionnel pour cette application.

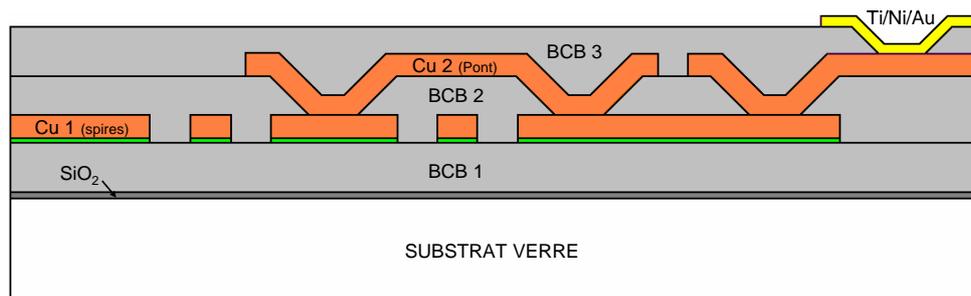


Figure 2 : Coupe verticale d'une inductance intégrée comportant $N_i = 1,5$ tour.

2.2. Paramètres géométriques du modèle

Etant donné la complexité des phénomènes à modéliser, nous débutons notre étude en fixant le nombre de paramètres géométriques libres au strict minimum, la contrainte étant de pouvoir balayer à l'aide de ces paramètres une plage de valeurs d'inductance suffisamment étendue. Deux familles d'inductances sont ainsi distinguées, et leurs caractéristiques géométriques sont précisées dans le Tableau 1. La première présente de larges pistes afin de diminuer la résistance série et donc d'augmenter le facteur de qualité en basse fréquence. Par contre, la surface offerte au substrat et par-là même la capacité de couplage au plan de masse étant plus importante, cela altère le facteur de qualité en haute fréquence. La famille II quant à elle, aux dimensions plus réduites, est dédiée aux applications nécessitant un niveau d'intégration plus important. Le plan de masse coplanaire est, à ce titre, beaucoup plus proche de la spirale.

Famille	W (μm)	S (μm)	S_g (μm)
I	50	50	200
II	10	10	50

Tableau 1 : Valeurs des paramètres géométriques fixes pour chaque famille d'inductance.

Seuls sont ici variables le nombre de tours N_t et le rayon interne R_{int} , et le Tableau 2 délimite les intervalles de variation. Nous espérons ainsi réduire la diversité des comportements observés afin qu'ils puissent être correctement représentés à l'aide d'un modèle analytique simple. Notons que la borne supérieure du rayon interne a été choisie pour chaque famille afin d'assurer le recoupement des plages de valeurs d'inductance associées.

Famille	R_{int}		N_t	
	Minimum (μm)	Maximum (μm)	Minimum	Maximum
I	75	$N_t = 1,5$	1,5	4,5
		$N_t > 1,5$		
		300	250	
II	75	175	1,5	5,5

Tableau 2 : Plages de variation des paramètres géométriques libres pour chaque famille d'inductance.

3. La modélisation d'inductances spiralées

3.1. Les simulateurs électromagnétiques

De nombreux simulateurs électromagnétiques, tels que HFSS [1] par exemple, sont aujourd'hui disponibles dans le commerce. Ils calculent la répartition du champ électromagnétique pour une géométrie arbitraire soumise à une excitation. Ce type de simulateur permet ensuite l'extraction de paramètres électriques équivalents à la solution calculée et ce, pour une utilisation ultérieure dans un simulateur électrique tel que SPICE. Bien que, théoriquement, les simulateurs puissent traiter une configuration quelconque, ils sont réellement appropriés pour simuler des structures simples et ne sont pas développés pour la simulation de grandes géométries tridimensionnelles (3D) comportant des segments conducteurs multiples. Les limitations ne sont pas structurelles, les seules approximations réalisées lors de la résolution étant relatives à la discrétisation intrinsèque à l'étape de maillage. Les restrictions sont liées aux temps de simulation, excessivement longs en l'état actuel, et qui imposent un accès à des processeurs rapides ainsi qu'à une mémoire plus que substantielle. Ces deux facteurs limitent considérablement, pour l'instant, la taille des composants raisonnablement simulables.

De plus, lors des situations fréquemment rencontrées où l'espacement entre conducteurs est faible devant leur largeur, une subtile stratégie de maillage devient alors indispensable à une discrétisation correcte des conducteurs. Ainsi, un désavantage majeur de la simulation numérique 3D est qu'elle nécessite de la part de l'utilisateur une certaine expertise, afin de donner des résultats significatifs. Il est d'ailleurs intéressant de noter que la complexité de ces logiciels est l'un des principaux freins à leur utilisation massive. En effet, les temps pour générer un projet complet peuvent être excessivement longs et il n'existe pas actuellement de passerelle incluant simplement ces outils à l'environnement de conception. *A contrario*, les simulateurs 2D et 2,5D sont plus intégrés, rapides et permettent l'étude de géométries complexes. Ils restent cependant insuffisants car ils ne prennent pas en compte totalement l'interaction avec le substrat [2].

3.2. Les modèles électriques segmentés

Toute simulation numérique fait intervenir, à un moment ou à un autre de la résolution, une étape de discrétisation. La spécificité des simulateurs tels que GEMCAP [3,4] est de décomposer les conducteurs en segments (en général une portion de ligne) et d'associer à chaque segment un modèle électrique [5]. Le circuit équivalent élémentaire est évidemment dépendant de la réalisation technologique de l'inductance mais s'apparente, à quelques variantes près, au schéma de la Figure 3. Il s'agit ici d'un circuit électrique en π , qui implique sept composants discrets ($R, L, C, R_1, C_1, R_2, C_2$) et une source de courant débitant un courant I . Cette représentation est très intéressante car intuitive. Il est en effet possible de justifier chaque élément du circuit par un phénomène physique.

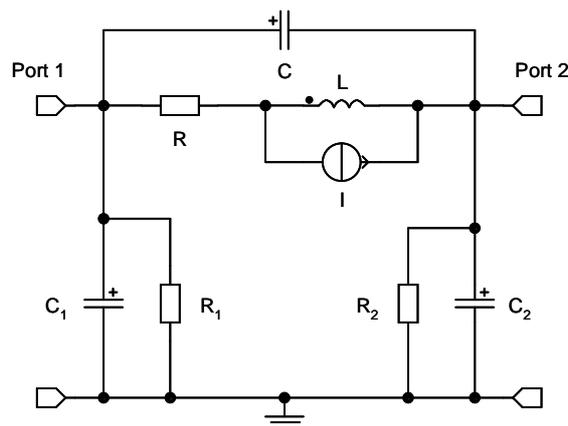


Figure 3 : Circuit électrique équivalent à un élément de la décomposition.

Le couplage électromagnétique au plan de masse est simplement modélisé par les capacités C_1 et C_2 et les pertes dans le substrat par les résistances R_1 et R_2 . Lorsque ce dernier est en verre, R_1 et R_2 sont très grandes, leur effet est donc négligeable. Les effets capacitifs entre le port 1 et le port 2 de la ligne élémentaire sont pris en compte par la capacité propre C . Les éléments R et L

représentent respectivement la résistance série et l'inductance propre de la piste. Ces grandeurs sont variables en fréquence, afin de rendre compte de la redistribution du courant dans le conducteur avec la fréquence. La source de courant traduit indirectement l'effet du couplage magnétique entre les lignes. Le courant I est, par conséquent, lié aux inductances mutuelles associées à chaque segment. Les capacités mutuelles entre éléments, également incluses dans le modèle global, n'apparaissent pas ici. Le travail de modélisation consiste donc à déterminer pour l'ensemble des circuits élémentaires les valeurs des paramètres électriques, soit à l'aide de formules analytiques issues de la théorie des lignes [6], soit par des méthodes numériques.

Le modèle du composant est obtenu simplement en chaînant l'ensemble des circuits élémentaires. La représentation par modèles segmentés est de ce fait très volumineuse. Cet inconvénient, acceptable pour une inductance carrée, devient critique dans le cas d'une inductance spiralée. Le nombre d'éléments nécessaires à une représentation, ne serait-ce qu'approximative, de la géométrie de l'inductance conduit alors à un énorme circuit équivalent. Ainsi, bien que ce type de modèle puisse être simplement implémenté dans le simulateur circuit, la complexité du modèle d'inductance peut surpasser celle du reste du circuit global, ce qui compromet la vitesse de la simulation électrique. De plus, l'optimisation d'un circuit complet nécessite un script informatique pouvant dynamiquement ajouter ou enlever des segments au modèle. La paramétrisation est donc loin d'être aisée.

3.3. Les modèles électriques compacts

Un modèle compact tente de représenter la réponse électrique d'un composant à l'aide d'un circuit équivalent aussi simple que possible. Le circuit à une cellule, présenté Figure 4 et retenu pour reproduire la mesure, est quasi systématiquement utilisé dans la littérature, à quelques variantes près [7,8,9]. Les cinq paramètres électriques (R, L, C, C_1, C_2) caractérisent les mêmes phénomènes que précédemment. Ils ne sont plus, à présent, attachés aux propriétés d'un élément de conducteur mais à celles du conducteur tout entier.

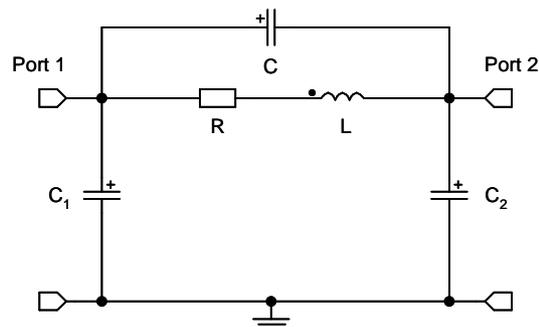


Figure 4 : Représentation électrique compacte d'une inductance.

La capacité C par exemple "autorise" le signal à passer directement du port 1 au port 2 sans traverser l'inductance. Cette capacité représente à la fois le couplage capacitif inter-spires et le couplage entre l'enroulement spiralé et le pont. Notons que c'est en grande partie cette dernière contribution qui participe à la valeur globale de C . Il s'agit en effet d'une structure planaire, les dimensions transversales sont donc en général largement supérieures aux dimensions verticales. On comprend dès lors que deux métallisations empilées offriront une surface en regard largement supérieure à deux pistes coplanaires. Une autre raison est d'origine électrique. Contrairement à la différence de potentiel entre le pont et l'enroulement spiralé, la différence de potentiel est très faible entre tours adjacents, ce qui a pour conséquence de diminuer les effets de la capacité de couplage inter-spires [10]. Considérons, pour nous en persuader, le cas limite d'une capacité dont les branches sont au même potentiel. Celle-ci n'a alors aucun effet sur la réponse d'un circuit, quel que soit sa valeur.

Contrairement au modèle segmenté, le modèle compact présente quelques limitations lorsque les différents couplages ne sont plus clairement identifiés au niveau macroscopique ou lorsque les effets de propagation ne sont plus négligeables. Il devient en particulier contestable si la largeur des pistes W est trop faible ou le nombre de tours N_t est trop grand. Notons qu'il ne s'agit pas là d'une limite structurelle du modèle, le circuit électrique équivalent étant mathématiquement capable de représenter un quadripôle réciproque quelconque. Cependant, la représentation comportementale retenue perd alors son caractère physique, ce qui se traduit par des paramètres extraits aux caractéristiques fréquentielles complexes qu'il est ensuite difficile de lier à la géométrie. Certains auteurs ont donc recours à un modèle à deux cellules [11] et d'autres encore introduisent des éléments distribués [12] afin d'étendre le domaine d'application de la représentation compacte. Pour notre part, nous avons vérifié que le modèle à une cellule est compatible avec l'ensemble d'inductances défini dans le Tableau 2, sur la plage de fréquences [0, 6] GHz.

S'il est clair que l'utilisation d'un modèle compact s'accompagne de contraintes, celui-ci reste néanmoins particulièrement intéressant car très souple d'utilisation. D'une part, il peut être directement utilisé dans le domaine temporel (en réalisant par exemple une analyse transitoire sous SPICE [13]) ou dans le domaine fréquentiel (à l'aide d'outils tels que APLAC [14]). Le modèle peut également être réduit à une représentation en paramètres S pour une optimisation rapide de circuits RF complexes. D'autre part, cette représentation comportementale utilise un faible nombre de paramètres, facilement extraits d'après la mesure. Il est possible, en ayant recours à des formules empiriques modifiées, de les relier explicitement aux spécifications géométriques du composant étudié. Ainsi, un ensemble de modèles compacts donne naissance à un modèle paramétré en fonction de la géométrie, autorisant alors le concepteur à changer les caractéristiques du composant à sa guise pour réaliser une application RF donnée.

4. Structure du modèle comportemental

Bien que la totalité du modèle compact ait été étudiée, nous allons dans tout ce qui suit nous focaliser sur les composants discrets R et L , c'est-à-dire sur les caractéristiques en transmission de l'inductance. Leur modélisation est en effet plus délicate, ces deux paramètres étant fonction de la fréquence $f \in [0, 6]$ GHz. L'étape de corrélation à la géométrie n'est donc pas directe et nous devons dans un premier temps rechercher une représentation fréquentielle adéquate.

4.1. Représentation de la composante résistive

La dépendance fréquentielle de la résistance électrique d'un conducteur est une conséquence de la dualité des champs électrique et magnétique. Oersted a en effet mis en évidence, au 19^{ième} siècle, que des charges se mouvant dans un conducteur sous l'action d'un champ électrique variable engendraient un champ magnétique, lui-même variable. Faraday a, quant à lui, montré qu'un conducteur génèrait en son sein un champ électrique en réponse à l'application d'un champ magnétique variable [15]. Le conducteur est donc le siège de courants induits qui, par nature, modifient la répartition globale du courant dans ce dernier. Les lignes de courant se localisent à la périphérie du conducteur lorsque la fréquence augmente. Ce phénomène est communément appelé "effet de peau" ou parfois effet Kelvin, du nom de Lord Kelvin qui le premier l'étudia [16].

L'effet de peau dépend de la géométrie du conducteur et de son orientation dans le champ magnétique exciteur. Si la formulation générale du problème est extrêmement simple, sa résolution est, à l'inverse, très ardue et ne peut être accomplie analytiquement que pour quelques configurations élémentaires. Intéressons-nous au cas scolaire d'une piste présentant une section rectangulaire de largeur W et d'épaisseur T telle que $W > T$, pour brièvement rappeler certains résultats de l'électromagnétisme. On suppose que le champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur est confiné dans la profondeur de peau δ et qu'il est constant sur cette distance. Cette hypothèse, très forte, permet néanmoins une analyse qualitative de l'évolution en fréquence de la répartition du courant dans le conducteur, représentée schématiquement Figure 5. La surface effective de conduction, en grisé, fait clairement apparaître trois modes de conduction délimités par les fréquences :

$$f_1 = \frac{4}{\pi\mu\sigma \cdot W^2} \Leftrightarrow \delta = \frac{W}{2} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{4}{\pi\mu\sigma \cdot T^2} \Leftrightarrow \delta = \frac{T}{2} \quad (4.1)$$

Dans le domaine fréquentiel $[0, f_1]$, l'inégalité $\delta > W/2$ est vérifiée. La résistance n'évolue pas avec la fréquence et peut donc être décrite par une constante, R_{dc} . Sur l'intervalle $[f_1, f_2]$ correspondant à la condition $T/2 < \delta < W/2$, l'effet de peau est unidimensionnel (1D) au sens où la

localisation des lignes de courant ne s'opère que suivant la direction x . On démontre alors que $R(f)$ présente une dépendance à la fréquence en \sqrt{f} . Enfin, dans le domaine $[f_2, +\infty]$, $\delta < T/2$, l'effet de peau devient bidimensionnel (2D) car le courant se concentre suivant x et z , la résistance est alors proportionnelle à la fréquence.

Le raisonnement que nous venons de faire est évidemment très grossier. En particulier, l'hypothèse d'un confinement strict du courant suivant l'épaisseur pourra facilement être critiquée. En effet, la profondeur de peau doit en pratique être largement inférieure à une dimension de la section de conduction pour que l'on puisse supposer, dans la direction associée, le champ électromagnétique nul au-delà d'une distance δ depuis la surface. Cette condition n'est pas vérifiée dans le domaine des Radio Fréquences lorsque l'on considère la direction z , les grandeurs δ et T étant du même ordre. L'étude préliminaire menée a néanmoins le mérite de conduire à des formules analytiques directement exploitables. Remarquons d'ailleurs qu'une étude électromagnétique peut être menée dans le cas 1D (*cf.* Annexe) et qu'elle nous amène aux mêmes conclusions.

Ainsi, nous avons démontré que la loi de variation de la résistance d'une piste rectangulaire est en première approximation successivement gouvernée par trois fonctions $\{1, \sqrt{f}, f\}$.

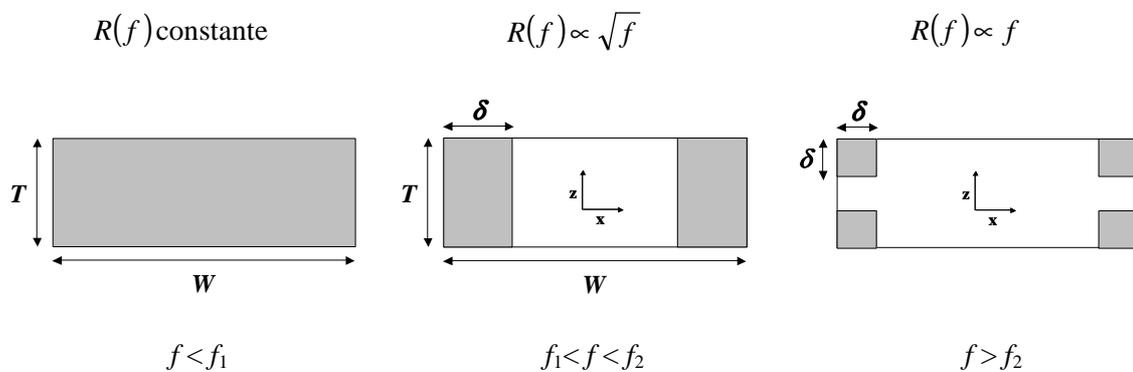


Figure 5 : Evolution de la répartition du courant dans une piste rectangulaire en fonction de la fréquence.

D'autres phénomènes physiques s'ajoutent à ceux que nous venons de présenter dans le cas d'une inductance spiralée. Notons tout d'abord la tendance naturelle du courant à se localiser sur la face interne de chaque spire, le courant choisissant le chemin de moindre impédance. D'autre part, une inductance doit être analysée comme une structure à conducteurs multiples. Le champ magnétique associé à la circulation du courant dans chaque spire induit, à haute fréquence, des courants de Foucault dans les spires voisines [17]. Cet effet, dit de proximité, conduit finalement à une localisation des lignes de courant sur la face interne des spires intérieures. Il n'intervient cependant pas au premier ordre dans le cas d'une structure plane [18] et peut, en conséquence, être négligé dans un premier temps.

Le domaine de fréquences $[f_1, f_2]$, où la résistance de la piste est dominée par l'effet de peau 1D, est d'autant plus étendu que celle-ci est large et que son épaisseur est faible, c'est-à-dire que le facteur de forme W/T est important. Il serait hasardeux de vouloir tirer plus de conclusions – en particulier quantitatives – de cette représentation, dont la fonction est avant tout illustrative. Nous préférons, pour notre part, déduire le comportement de chaque famille d'inductances de l'observation directe de leurs réponses fréquentielles caractéristiques. La Figure 6 donne, en fonction de la fréquence, la résistance de deux inductances typiques, définies par les paramètres $N_t = 2,5$ et $R_{int} = 125 \mu\text{m}$. Notons que les résistances ont été normalisées suivant R_{dc} dans le seul but de faciliter la visualisation.

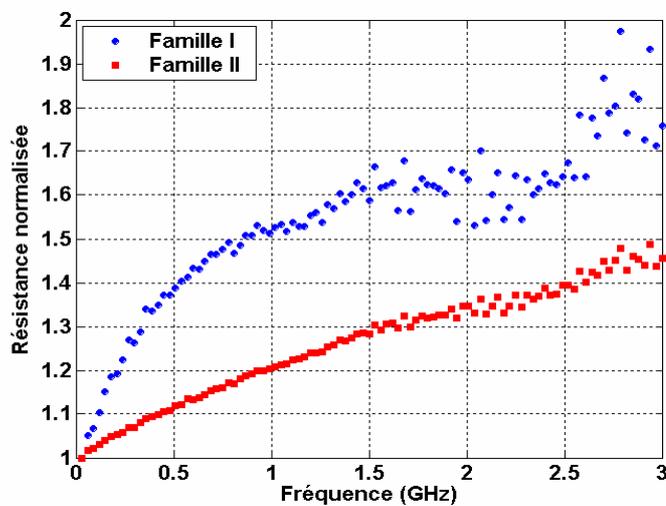


Figure 6 : Comportement typique de la composante résistive des inductances de type I, II.

Les courbes ci-dessus font clairement apparaître que les variations de la résistance des inductances de type I peuvent être correctement décrites par la fonction \sqrt{f} , alors que c'est la fonction f qui prédomine dans le cas de la famille II. En conséquence, nous retenons pour les inductances de première espèce, l'équation (4.2) et pour la seconde, l'équation (4.3). Le coefficient R_{dc} représente la résistance à fréquence nulle et le coefficient R_{ep} modélise l'effet de peau, qu'il soit 1D ou 2D.

$$R(f) \approx R_{dc} + R_{ep} \cdot \sqrt{f} \quad \text{Famille I} \quad (4.2)$$

$$R(f) \approx R_{dc} + R_{ep} \cdot f \quad \text{Famille II} \quad (4.3)$$

On peut légitimement s'interroger à ce stade sur le pouvoir descriptif de formules aussi simples. Elles ne sont valables que parce que le coefficient R_{ep} est laissé libre : il est ajusté pour chaque inductance afin de représenter au mieux les diverses réponses observées. La conséquence

principale d'une telle approche est que le modèle n'est pas prédictif en l'état, le coefficient R_{ep} n'étant pas relié aux caractéristiques de l'inductance. Certes, il existe des modèles analytiques basés sur une résolution approximative du problème électromagnétique [18,19]. Les expressions résultantes, plus complexes, ne sont cependant pas suffisamment précises pour être directement exploitables et nécessitent également une étape d'optimisation. Le gain en précision, quand il existe, ne justifie pas l'accroissement de la complexité du modèle et c'est la raison pour laquelle nous leur préférons la représentation simple ci-dessus.

4.2. Représentation de la composante inductive

Contrairement à la composante résistive, la redistribution du courant dans les conducteurs, liée à l'augmentation de la fréquence, a beaucoup moins d'effet sur la valeur de l'inductance d'un conducteur. L'inductance totale d'un conducteur quelconque peut, en effet, être scindée en deux parties : l'inductance externe, liée au champ magnétique extérieur au conducteur, et l'inductance interne due au champ magnétique interne. Ces deux contributions sont disproportionnées et c'est en premier lieu l'inductance externe qui participe à la valeur globale de l'inductance.

A haute fréquence, le courant se concentre à la périphérie du conducteur. Nous utilisons ici le terme "haute fréquence" pour qualifier ce domaine de fréquences où la profondeur de peau est faible devant les grandeurs caractéristiques de la section de piste. L'énergie magnétique contenue dans le volume du conducteur tend donc vers zéro à fréquence infinie, ce qui se traduit par une annulation de l'inductance interne. Les variations de l'inductance équivalente $L(f)$ peuvent ainsi être imputées à l'inductance externe.

Wheeler démontre, dans un article reconnu et très souvent cité [20], que la résistance et la réactance d'un conducteur plan semi-infini sont égales. Il en déduit que l'inductance interne d'un conducteur semi-infini décroît comme $1/\sqrt{f}$. Ce résultat, qui peut être étendu à haute fréquence aux conducteurs à section circulaire, ne s'applique pas en toute rigueur dans le cas d'un conducteur à section rectangulaire. La relation directe liant la réactance à la résistance n'est alors plus exacte [21]. Néanmoins, on peut considérer, en première analyse, qu'elle est approximativement conservée. La Figure 7 représente l'inductance équivalente des inductances définies au paragraphe précédent. Afin de pouvoir être aisément comparés, les résultats ont été normalisés par la valeur de l'inductance à 3 GHz.

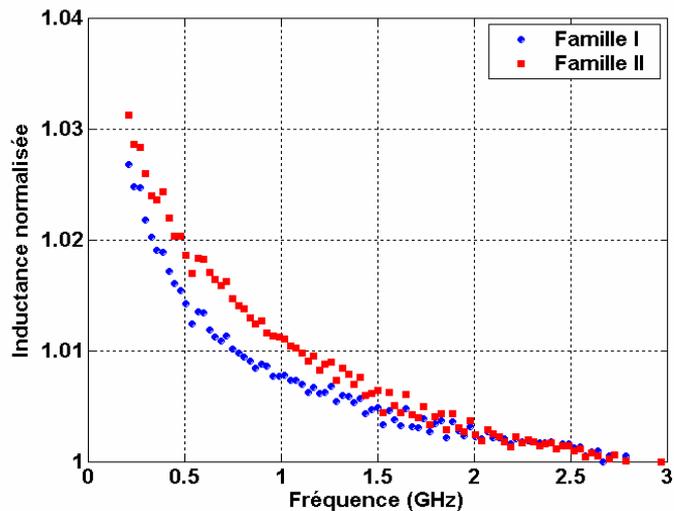


Figure 7 : Comportement typique de la composante inductive des inductances de type I, II.

Le comportement est à peu près identique pour les deux familles, ce qui signifie que l'on peut retenir le même modèle, donné par l'équation (4.4). Au coefficient L_{ac} correspond la valeur de l'inductance $L(f)$ lorsque la fréquence tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque la conduction devient surfacique. Le coefficient L_{ep} pondère, pour sa part, la variation fréquentielle de $L(f)$ causée par l'effet de peau, il caractérise donc indirectement l'inductance interne. Il doit être noté que la limite à fréquence nulle de l'expression (4.4) utilisée pour représenter $L(f)$ n'est pas finie, résultat qui n'est pas en accord avec l'analyse physique. Ainsi, le modèle présenté ne doit en aucune manière être utilisé en dehors de la plage de fréquences pour laquelle il a été établi, en l'occurrence [0,2 , 6] GHz.

$$L(f) \approx L_{ac} + \frac{L_{ep}}{\sqrt{f}} \quad (4.4)$$

L'impédance en transmission $Z(f)$ de l'inductance est, en conclusion, totalement caractérisée par la connaissance de quatre variables R_{dc} , R_{ep} , L_{ac} , L_{ep} . Notons que tous les paramètres du modèle compact (cf. Figure 4) sont extraits de la mesure par optimisation. Cette étape a fait l'objet d'études poussées, donnant lieu à des procédures d'extraction parfois complexes. Elles sont motivées en raison du fait que l'effet de certaines variables du modèle sur les réponses simulées sont parfois difficilement discernables, conduisant alors à une extraction paramétrique ambiguë. Certains auteurs ont ainsi recours à des algorithmes basés sur la théorie des réseaux neuronaux [12], ou encore guident l'optimisation grâce à une analyse des propriétés mathématiques de la fonction de transfert associée à chaque branche du circuit électrique [22,23]. Ces raffinements ne sont pas apparus nécessaires dans le cas des inductances spiralées, qui nous concerne ici.

5. Corrélation à la géométrie

L'extraction paramétrique est effectuée sur un ensemble de mesures, noté Λ , comportant 64 éléments. Les caractéristiques des inductances mesurées quadrillent, autant que faire se peut, l'espace des facteurs géométriques défini dans le Tableau 1 et le Tableau 2. L'objectif de cette partie est de déduire de ces extractions pour les familles I et II, des formules empiriques reliant les coefficients R_{dc} , R_{ep} , L_{ac} , L_{ep} aux paramètres géométriques libres N_t et R_{int} . Ces expressions sont tout simplement obtenues par ajustage de fonctions analytiques, dont nous essaierons de justifier la structure et l'emploi.

5.1. Expression analytique de R_{dc}

La résistance R_{dc} de la piste métallique constituant l'inductance est donnée, avec une très bonne précision, par la relation usuelle (5.1). La formule est en toute rigueur approchée du fait que la courbure de la spirale est alors négligée, mais l'approximation est sans conséquence notable.

$$R_{dc} \approx \frac{l}{\sigma \cdot WT} \quad l = l_{spirale} + l_{pont} + l_{accès} \quad (5.1)$$

La grandeur l ci-dessus représente la longueur moyenne totale de la piste métallique. Elle peut être scindée en trois composantes : la longueur de l'enroulement spiralé ($l_{spirale}$), du pont (l_{pont}) et des pistes d'accès ($l_{accès}$). Le Tableau 3 relie ces variables intermédiaires aux paramètres géométriques de l'inductance.

Variable	Expression
R_{ext}	$R_{int} + W + N_t \cdot (W + S)$ (5.2)
$l_{spirale}$	$\pi(R_{int} + R_{ext})N_t$ (5.3)
l_{pont}	$\left(N_t - \frac{1}{2}\right) \cdot (W + S)$ (5.4)
$l_{accès}$	$2S_g$ (5.5)

Tableau 3 : Variables intermédiaires impliquées dans le calcul de R_{dc} , exprimées en fonction des paramètres géométriques de l'inductance.

5.2. Expression analytique de R_{ep}

Le modèle résistif présenté au paragraphe 4.1, basé sur l'hypothèse d'une surface effective de conduction, nous renseigne sur le type de représentation à adopter pour R_{ep} . En effet, la

résistance $R(f)$ étant, dans cette représentation, proportionnelle à la longueur de la ligne, elle suggère que le coefficient R_{ep} l'est également. La Figure 8 et la Figure 9 représentent, respectivement pour les familles I et II, la caractéristique $R_{ep}(l)$ où l est la longueur totale de l'inductance précédemment définie. Il ressort de l'observation de ces deux graphiques que la relation de proportionnalité n'est pas vérifiée dans le cas d'une d'inductance. Il apparaît également qu'une simple correction conduirait à d'intéressants résultats. Ainsi l'équation (5.6) lie-t-elle empiriquement R_{ep} à la longueur l à l'aide une fonction puissance. Celle-ci est en quelque sorte une généralisation de la loi de proportionnalité, cette dernière correspondant au cas particulier $\beta = 1$.

$$R_{ep} \approx \alpha \cdot l^\beta \quad (5.6)$$

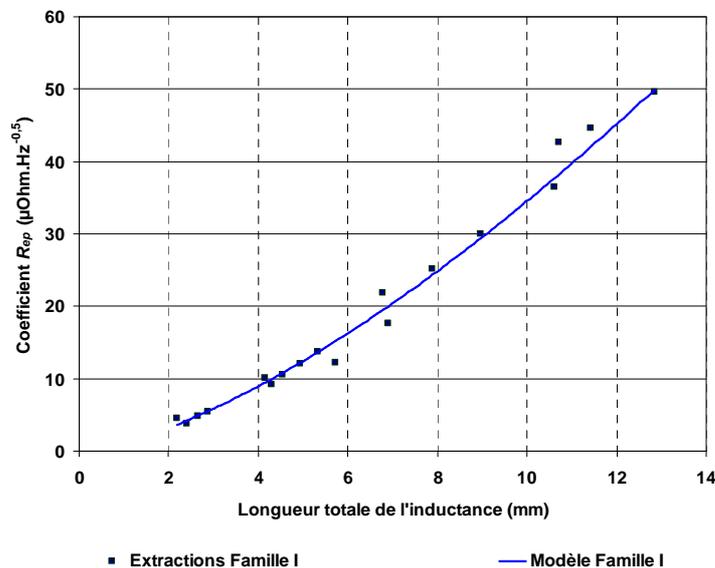


Figure 8 : Coefficient R_{ep} en fonction de la longueur l de l'inductance, famille I.

Le travail de modélisation consiste donc à déterminer le couple (α, β) ajustant au mieux la caractéristique $R_{ep}(l)$. Il s'agit de nouveau d'un problème d'optimisation. Remarquons que R_{ep} couvre une large gamme de valeurs, ce qui peut être fâcheux dans certains cas. En effet, parce qu'elles supposent que l'erreur expérimentale est constante sur tout le domaine balayé par la variable explicative, les méthodes communes d'optimisation minimisent la somme des résidus, c'est-à-dire la somme des erreurs absolues observées entre le modèle et la valeur expérimentale. Elles favorisent donc, si l'on considère à présent l'erreur relative, le modèle dans la zone de l'espace des paramètres libres (R_{int}, N_f) où les valeurs de R_{ep} sont les plus fortes. On peut alors être amené, lorsque la précision est insuffisante, à segmenter le domaine d'étude en plusieurs plages et à produire pour chacune d'elles un modèle géométrique. Ces considérations seront abordées plus en détail au chapitre 4.

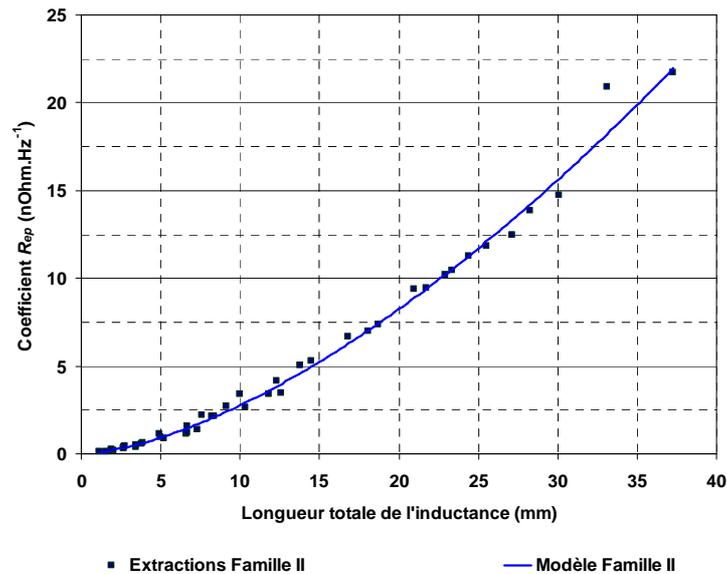


Figure 9 : Coefficient R_{ep} en fonction de la longueur l de l'inductance, famille II.

Nous récapitulons dans le Tableau 4, ci-dessous, les coefficients du modèle géométrique relatifs à R_{ep} . On peut noter que le coefficient β est supérieur à l'unité, qu'il s'agisse de la famille I ou de la famille II. La cause peut être imputée à l'effet de proximité, d'autant plus marqué que le champ magnétique créé par l'inductance est intense, c'est-à-dire que le nombre de tours N_l est grand. Ce phénomène étant additif, il conduit d'un point de vue comportemental à un effet de peau effectif – si l'on peut dire – plus important. Ceci expliquerait qualitativement la croissance "convexe" du coefficient R_{ep} avec la longueur l de l'inductance.

Famille	Unités de R_{ep}	α	β
I	$\mu\Omega.Hz^{-0.5}$	1,160	1,474
II	$n\Omega.Hz^{-1}$	$7,37.10^{-2}$	1,574

Tableau 4 : Paramètres du modèle géométrique de la résistance d'effet de peau.

5.3. Expression analytique de L_{ac}

Si nous examinons à présent l'aspect inductif du problème, une inductance spiralée se compose de deux types de conducteurs : le pont et les lignes d'accès à géométrie rectiligne d'une part, les spires de l'inductance à géométrie courbe d'autre part. Leurs comportements sont fondamentalement différents et requièrent une modélisation distincte. La relation (5.7) isole les différentes composantes de L_{ac} évaluées dans cette partie, à savoir : l'inductance de la spirale ($L_{spirale}$), du pont (L_{pont}) et des accès ($L_{accès}$). En première approximation, le faible couplage mutuel entre ces différents éléments est négligé. Une formulation analytique complète ne pourrait être

qu'extrêmement lourde et serait inappropriée à ce stade de l'étude. Les modèles doivent en effet être intégrés à terme dans un logiciel de conception, comme par exemple CADENCE [24], dont le langage de programmation interne est spécialisé et ne permet pas facilement l'implémentation d'expressions sophistiquées. Cette restriction impose de concilier précision et complexité du modèle et donc de faire certaines concessions à la rigueur.

$$L_{ac} \approx L_{spirale} + L_{pont} + L_{accès} \quad (5.7)$$

Si la corrélation de L_{pont} et $L_{accès}$ à la géométrie est assez directe, la modélisation de l'inductance $L_{spirale}$ est en revanche plus ardue et exige plusieurs étapes. Nous commencerons ainsi par examiner quelques expressions souvent citées dans la littérature. Les limites constatées nous conduiront ensuite à développer sur cette base notre propre modèle comportemental.

5.3.1. Modélisation du pont et des accès

L'inductance du pont (L_{pont}) et des lignes d'accès ($L_{accès}$) sont modélisées à l'aide de la formule de Caulton modifiée [6,25]. Celle-ci implique les variables l_{pont} et $l_{accès}$, définies dans le Tableau 3. Le résultat est directement obtenu en nH, lorsque les longueurs sont exprimées en μm .

$$L_{pont,accès} \approx 2.10^{-4} \cdot l_{pont,accès} \cdot \left\{ \arcsin h(x) + x \cdot \arcsin h\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2} - 1 \right] \right\} \quad (5.8)$$

$$\text{où } x = \frac{l_{pont,accès}}{W + T} \quad (5.9)$$

5.3.2. Modélisation de la spirale

5.3.2.1 Modèles existants

Si nous disposons d'un impressionnant arsenal de formules pour la modélisation d'inductances carrées [26,27,28], la situation est beaucoup moins favorable en ce qui concerne les inductances circulaires. Nous avons pour notre part retenu trois modèles empiriques que l'on doit à Wheeler [29], Burkett [30] et Mohan [31]. Les relations résultantes, définies dans le Tableau 5, sont intéressantes car d'une grande concision. Elles n'impliquent en effet que trois variables : le nombre de tours N_i de l'inductance, ainsi que son rayon moyen (noté a) et la largeur de l'enroulement spiralé (noté c), dont les expressions sont données ci-dessous.

$$a = \frac{R_{ext} + R_{int}}{2} \quad c = R_{ext} - R_{int} \quad (\mu\text{m}) \quad (5.10)$$

Auteur	Expression de $L_{spirale}$ (nH)
Wheeler	$\frac{1}{25,4} \cdot \frac{(a \cdot N_t)^2}{8a + 11c} \quad (5.11)$
Burkett	$\frac{0,8}{25,4} \cdot \frac{(a \cdot N_t)^2}{6a + 10c} \quad (5.12)$
Mohan	$4\pi \cdot 10^{-4} \cdot a \cdot N_t^2 \cdot \left[\ln\left(\frac{2,46a}{c}\right) + 0,2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 \right] \quad (5.13)$

Tableau 5: Différents modèles analytiques de $L_{spirale}$.

Phénoménologiques, toutes ces formules ne distinguent pas les différentes participations à l'inductance totale que sont l'inductance interne, externe et mutuelle. Ces modèles sont d'ailleurs, *stricto sensu*, dédiés au calcul de l'inductance en basse fréquence de l'enroulement spiralé. Faire appel à eux pour tenter de représenter l'inductance en haute fréquence L_{ac} revient finalement à négliger l'inductance interne. L'erreur commise reste acceptable car l'inductance interne est faible, comme nous l'avons souligné au paragraphe 4.2.

Si le modèle de Wheeler a été établi dès 1928, originellement pour des inductances discrètes, le modèle de Burkett est, quant à lui, beaucoup plus récent. Bien que plusieurs décennies séparent leurs publications, il est amusant de constater qu'ils demeurent structurellement similaires. Seuls varient les coefficients devant les variables a et c . La formule de Mohan est obtenue en appliquant, aux inductances circulaires, la technique de représentation d'une géométrie à l'aide de rubans conducteurs équivalents, initialement proposée par E. Rosa [32]. On retiendra que tous les modèles prédisent que la valeur d'une inductance circulaire est proportionnelle au carré du nombre de tours.

5.3.2.2 Evaluation des modèles existants

Les valeurs d'inductance rendues par les modèles de Wheeler (L_{Wh}), de Burkett (L_{Bu}) et de Mohan (L_{Mo}) sont comparées à l'inductance extraite L_{ac} . Mentionnons que la modélisation du pont et des lignes d'accès est commune aux trois modèles, qui ne diffèrent donc que par la valeur de $L_{spirale}$. L'évaluation porte sur les $N = 64$ inductances de l'ensemble Λ , défini au début de cette partie. Pour chaque inductance, indicée i avec $i \in [1, N]$, l'erreur relative $e_L(i)$ est calculée entre $L_{Modèle}(i)$ et $L_{ac}(i)$, où $Modèle \in \{Wh, Bu, Mo\}$.

Les résultats obtenus pour les familles d'inductances I et II sont synthétisés sur les deux graphiques de la Figure 10. Ce type de graphe, très utile dès lors que l'on cherche à évaluer un modèle sur un grand nombre d'échantillons, nécessite cependant quelques explications. Il représente la fonction de répartition complémentaire de l'erreur de modélisation e_L . Cette définition, quoique rigoureuse, n'est malheureusement pas très explicite. La proportion d'inductances (axe des ordonnées) dont l'erreur relative e_L excède une valeur seuil donnée (e_s) est tracée en fonction de e_s (axes des abscisses). Considérons, par exemple, la courbe relative au modèle de Burkett et à la famille I. On lit directement en (1) et en (3) le minimum et le maximum de l'erreur observée sur l'ensemble des inductances testées, à savoir 6,5 % et 38 %. De plus, le point numéroté (2) sur le graphique peut être interprété de la manière suivante : 40 % des inductances testées présentent une erreur sur L_{ac} supérieure à $e_s = 20$ %. On en déduit immédiatement qu'à la fraction 50 %, sur l'axe des ordonnées, correspond la médiane de la distribution de l'erreur, sur l'axe des abscisses. Rappelons que la médiane d'une population est définie comme la valeur de e_s partageant en deux moitiés égales la série ordonnée des observations. Elle est parfois préférée à la moyenne car moins sensible que cette dernière aux individus aberrants, au sens des statistiques [33].

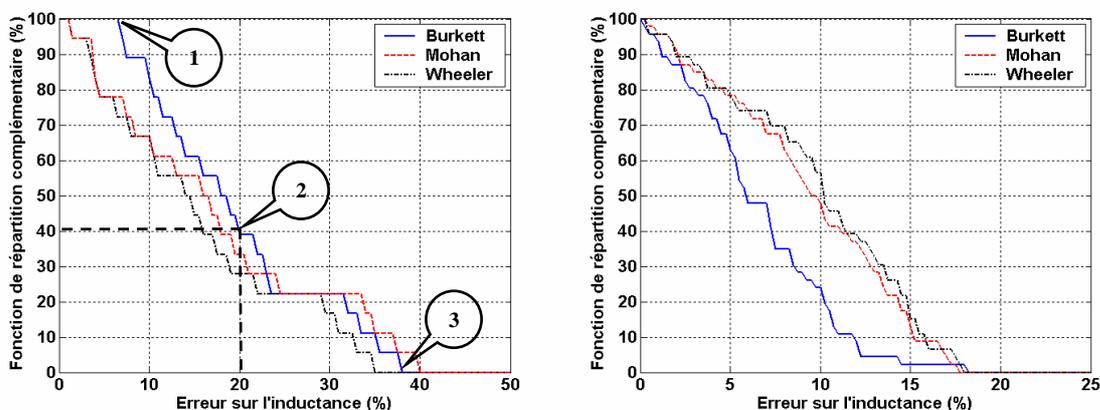


Figure 10 : Analyse statistique de l'erreur relative commise sur L_{ac} , case de la famille I (à gauche) et de la famille II (à droite).

Les erreurs, très importantes, reflètent les limitations de formules analytiques trop simples par rapport à la complexité des phénomènes qu'elles tentent de représenter. Wheeler précise ainsi que les résultats donnés par la relation (5.11) peuvent être litigieux lorsque l'espacement entre les spires est trop important ou lorsque le nombre de tours est faible. Une analyse plus poussée conforte cette remarque en montrant que l'erreur relative est grande (~ 25 %) pour les inductances de faible valeur et ce, quel que soit le modèle retenu. Certes, une méthode de compensation imparfaite peut reporter sur la mesure une inductance parasite liée au motif de test et l'erreur introduite sera effectivement d'autant plus grande que la valeur de l'inductance est faible. Cette

explication est cependant incompatible avec un tel niveau d'erreur, d'après les conclusions du chapitre précédent. Remarquons plus simplement qu'une inductance faible comporte en général peu de tours...

Bien que l'étude ne le fasse pas directement apparaître ici, il est intéressant de noter que les trois modèles évalués ont souvent tendance à surestimer la valeur de l'inductance, lorsque celle-ci est membre de la famille II. Ce comportement singulier peut être attribué au plan de masse, que les modèles n'intègrent pas en l'état. En effet, le couplage magnétique au plan de masse se traduit électriquement par une inductance mutuelle négative qui diminue la valeur totale de l'inductance. L'interaction avec le plan de masse étant d'autant plus forte que ce dernier est proche de l'enroulement spiralé, cela peut expliquer les dérives constatées pour la famille II ($S_g = 50 \mu\text{m}$).

Enfin, dans le but d'apprécier globalement la qualité des modèles analytiques proposés, nous calculons la moyenne de l'erreur relative e_L sur l'ensemble d'inductances Λ . La définition exacte de cette grandeur, notée E_L^{moy} , est donnée ci-après :

$$E_L^{moy} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N e_L(i) \quad e_L(i) = \left| \frac{L_{Modèle}(i)}{L_{ac}(i)} - 1 \right| \quad Modèle \in \{Wh, Bu, Mo\} \quad (5.14)$$

Les résultats obtenus, consignés dans le Tableau 6, sont sans appel. Il est en effet généralement admis qu'une précision d'environ 5 % sur L_{ac} est nécessaire à la conception d'une application RF. Nous en concluons immédiatement qu'aucun de ces modèles n'est satisfaisant et devons en conséquence développer notre propre modèle.

E_L^{moy} (%)	Famille I	Famille II
Wheeler	15,35	9,74
Burkett	19,40	6,53
Mohan	17,33	9,44

Tableau 6 : Erreurs de modélisation de L_{ac} , observées sur Λ pour les différents modèles analytiques.

5.3.2.3 Modèle développé

Les modèles comportementaux précédents ne sont pas suffisamment précis, nous l'avons vu. Ils ne prennent, par exemple, pas en compte le plan de masse dont l'effet ne peut être négligé. Quoique présentant des défauts indéniables, il n'en demeure pas moins qu'ils contiennent une part

de vérité. Nous allons, en conséquence, reprendre dans ce qui suit la structure mathématique des deux premiers modèles, c'est-à-dire généraliser la formule (5.11) établie par Wheeler. Le modèle comportemental que nous proposons en (5.15) est renseigné en ajustant les coefficients de l'équation $(l_0, \alpha, \beta, \gamma, x, y)$ afin de reproduire au mieux l'ensemble des valeurs extraites pour $L_{Spirale}$. Cette approche présente l'avantage de donner des résultats précis en interpolation, c'est-à-dire entre les points d'expérience utilisés pour l'optimisation. Par contre, toute extrapolation se révèle hasardeuse puisque les paramètres extraits n'ont aucune justification physique.

$$L_{Spirale} \approx l_0 + \frac{(a \cdot N_t)^\alpha}{x \cdot a^\beta + y \cdot c^\gamma} \quad (\text{nH}) \quad (5.15)$$

5.3.2.4 Validation du modèle développé

Les paramètres du modèle ajusté sont consignés dans le Tableau 7. Le protocole d'évaluation, identique à celui retenu au paragraphe 5.3.2.2, débouche sur l'étude statistique de la Figure 11. Il en ressort que 90 % des inductances de la famille II présentent une erreur inférieure à 3 %, ce pourcentage chutant, pour la famille I, à 1,75 %. Il s'agit là d'une franche validation de notre modèle, l'erreur relative moyenne E_L^{moy} calculée sur l'ensemble Λ – respectivement de 0,94 % pour la famille I et 1,66 % pour la famille II – étant largement inférieure au seuil précédemment fixé à 5 %.

Paramètres	l_0	α	β	γ	x	y
Famille I	0,30	1,940	1,643	0,853	1,86	$5,17 \cdot 10^2$
Famille II	0,10	1,784	0,614	0,759	$4,45 \cdot 10^2$	$1,64 \cdot 10^2$

Tableau 7 : Paramètres du modèle optimisé pour les différentes familles.

Bien que le modèle de Wheeler optimisé donne d'excellents résultats, de grandes précautions doivent être prises lors de son utilisation. Il est en effet crucial de s'assurer que les conditions d'utilisation du modèle soient similaires aux conditions de réalisation de celui-ci. De nombreux paramètres, qu'ils soient technologiques ou géométriques, influencent la valeur d'une inductance. Cette contrainte peut en conséquence être difficile à satisfaire. La conclusion, bien qu'évidente, doit néanmoins être rappelée afin d'éviter tout désagrément : un modèle ajusté perd en souplesse et ne se prête absolument pas à l'extrapolation. Aussi, plus que le résultat lui-même, c'est la démarche présentée au cours de ce chapitre qui doit être retenue car elle peut toujours être appliquée à un problème spécifique.

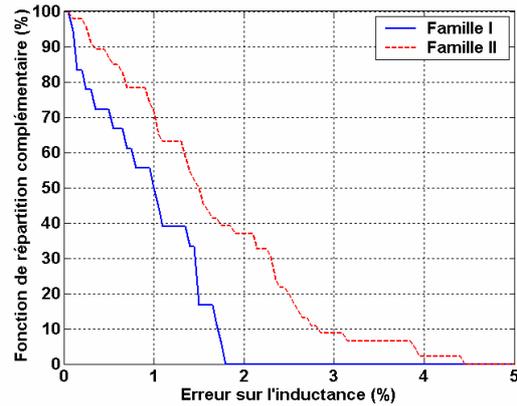


Figure 11 : Analyse statistique de l'erreur relative commise sur L_{ac} , modèle de Wheeler optimisé.

5.4. Expression analytique de L_{ep}

L'étude de Wheeler relative au conducteur plan semi-infini [20], que nous avons évoquée au paragraphe 4.2, laisse à penser que les paramètres R_{ep} et L_{ep} ne sont pas totalement étrangers l'un à l'autre. Il ne nous paraît donc pas aberrant d'adopter pour la modélisation de L_{ep} la même approche que celle retenue pour R_{ep} . Ainsi, le coefficient L_{ep} est représenté en fonction de la longueur totale de l'inductance [9], notée l et définie page 69. Cette représentation est effectivement pertinente puisqu'elle conduit à une fonction relativement continue, comme le montrent les courbes de la Figure 12 et de la Figure 13. $L_{ep}(l)$ est de ce fait propice à l'interpolation.

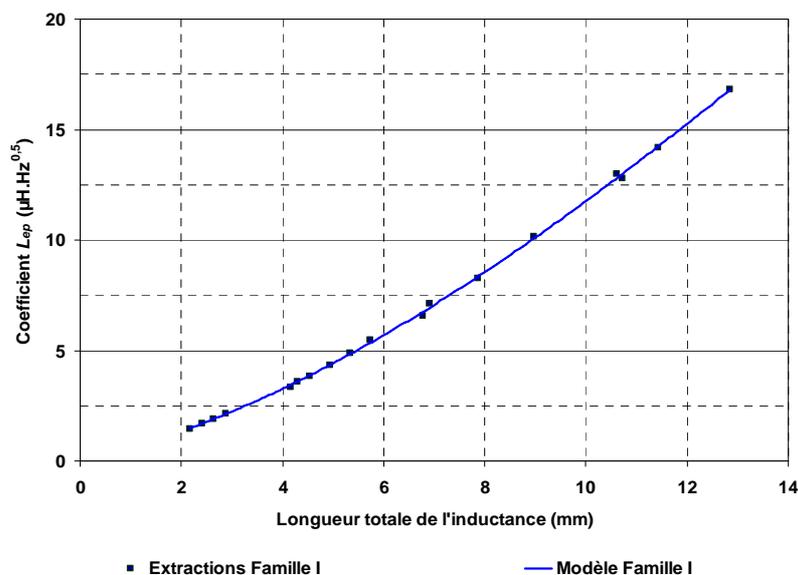


Figure 12 : Coefficient L_{ep} en fonction de la longueur l de l'inductance, famille I.

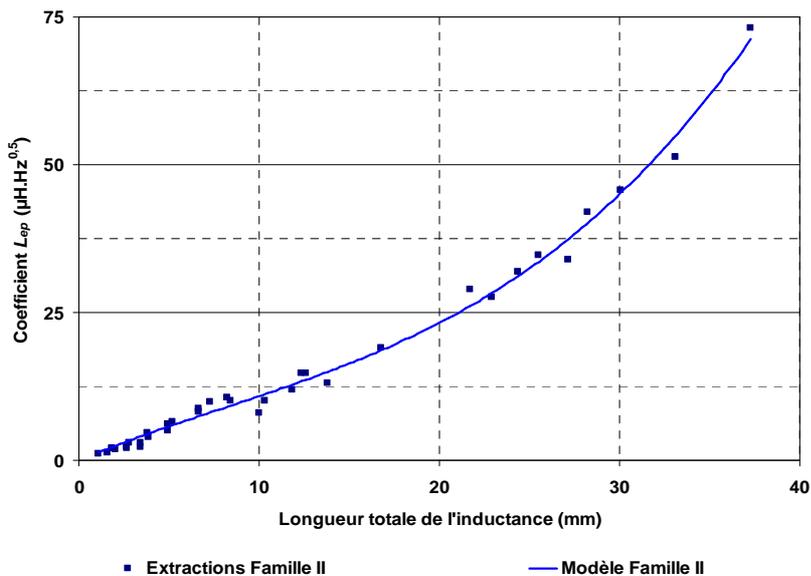


Figure 13 : Coefficient L_{ep} en fonction de la longueur l de l’inductance, famille II.

Le modèle géométrique adopté est un polynôme d’ordre 3, dont les coefficients sont précisés dans le Tableau 8. La détermination de ce dernier n’est pas sans lien avec la physique puisqu’en imposant $L_0 = 0$, le modèle qui en résulte vérifie le principe de causalité : à longueur l nulle, le paramètre L_{ep} est nul. Par contre, le coefficient L_3 adjoint à la famille I est négatif, ce qui implique que le modèle de L_{ep} tende vers $-\infty$ lorsque la longueur l tend vers $+\infty$. Ceci ne peut avoir de réalité physique, et l’on butte ici de nouveau sur la limitation intrinsèque à toute démarche empirique : le modèle paramétré de L_{ep} ne peut être utilisé qu’en interpolation.

$$L_{ep} \approx L_0 + L_1 \cdot l + L_2 \cdot l^2 + L_3 \cdot l^3 \quad (\mu\text{H} \cdot \text{Hz}^{0,5}) \quad (5.16)$$

Paramètres	L_0	L_1	L_2	L_3
Famille I	0	$5,13 \cdot 10^{-1}$	$8,18 \cdot 10^{-2}$	$-1,55 \cdot 10^{-3}$
Famille II	0	1,27	$-3,14 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-3}$

Tableau 8 : Paramètres du modèle géométrique de L_{ep} pour les différentes familles.

6. Confrontation à la mesure

Cette partie vise simplement à illustrer à l’aide d’exemples concrets les potentialités du modèle compact paramétré, objet de ce chapitre. Nous considérons dans ce but deux inductances notées L_I et L_{II} qui, comme leur nom l’indique, sont respectivement de type I et de type II. Elles ont les mêmes paramètres géométriques libres, en l’occurrence $R_{int} = 75 \mu\text{m}$ et $N_t = 2,5$. Leurs caractéristiques, mesurées et simulées, sont tracées Figure 14 et Figure 15. Celles-ci permettent

d’embrasser en un regard la qualité structurelle de la représentation choisie ainsi que la pertinence des équations de liaison à la géométrie.

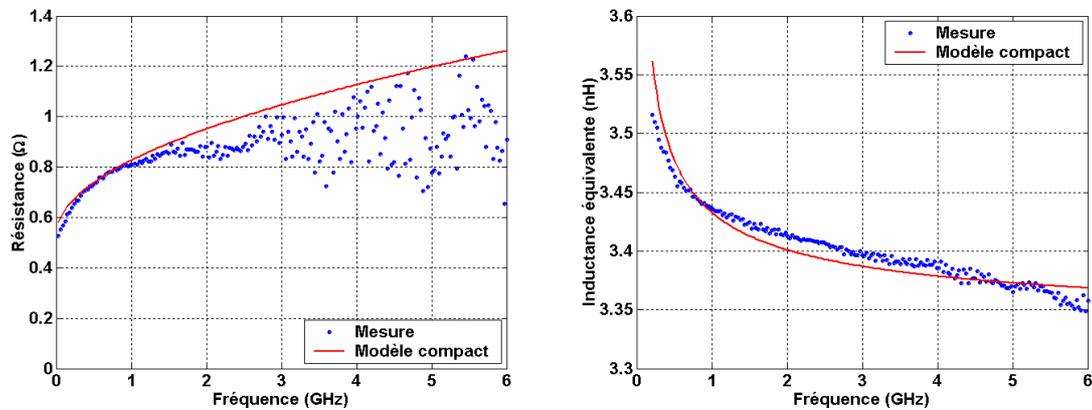


Figure 14 : Résistance et inductance équivalente de l’inductance L_I .

Les erreurs relatives moyennes et maximales sont calculées pour la résistance (e_R^{moy} , e_R^{max}) et l’inductance équivalente (e_L^{moy} , e_L^{max}) sur la bande de fréquences $\Delta f = [0, 6]$ GHz. Intéressons-nous tout d’abord à l’inductance L_I . Si les résultats obtenus sur $R(f)$ sont perfectibles ($e_R^{moy} = 16,39\%$, $e_R^{max} = 93,1\%$), ceux concernant $L(f)$ sont plus que convenables ($e_L^{moy} = 0,26\%$, $e_L^{max} = 1,30\%$). L’erreur relative e_L^{moy} est par exemple de l’ordre de grandeur de l’incertitude expérimentale déterminée au chapitre 1. On vérifie une fois de plus que l’erreur maximale n’est pas un outil d’évaluation adéquat car il est très sensible au bruit de mesure. Le modèle paramétré se comporte également très correctement lorsque l’inductance L_{II} est simulée puisqu’il en ressort : $e_R^{moy} = 6,61\%$, $e_R^{max} = 28,45\%$, $e_L^{moy} = 3,27\%$, $e_L^{max} = 4,99\%$. Le décalage quasi constant observé sur $L(f)$, entre mesure et simulation, reflète un défaut du modèle géométrique de L_{ac} . Notons enfin que, pour ces deux inductances, $R(f)$ est surestimée au-delà de 3 GHz. On voit ainsi clairement apparaître les limites des formules très simples (4.2) et (4.3) retenues pour la modélisation fréquentielle de la résistance série.

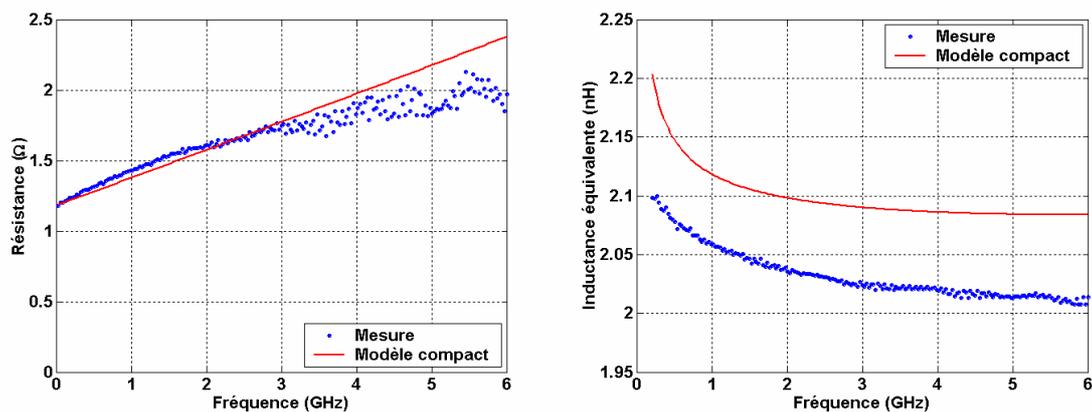


Figure 15 : Résistance et inductance équivalente de l’inductance L_{II} .

7. Conclusion

Les caractéristiques électriques d'une inductance spiralée ont été représentées, dans ce chapitre, à l'aide d'un circuit électrique compact comportant une unique cellule en π . Chaque paramètre de ce modèle comportemental a, ensuite, été relié à la géométrie par une démarche expérimentale. Il s'ensuit un modèle paramétré qui s'est révélé être un outil de prédiction performant, particulièrement bien adapté à nos besoins. Constitué de fonctions analytiques simples, il constitue un excellent compromis entre complexité et précision et peut, de ce fait, être très facilement implémenté dans la plupart des logiciels d'aide à la conception. Les résultats sur un paramètre critique tel que la valeur de l'inductance (L_{ac}) sont précis puisque l'erreur relative constatée sur un ensemble de 64 inductances est, en moyenne, inférieure à 2 % et n'excède pas 4,5 % dans tous les cas. Cette étude a également montré que les performances ne sont absolument pas garanties si le modèle est employé en extrapolation.

La structure du circuit électrique retenu est pertinente et peut, en conséquence, être conservée par la suite lors du développement de modèles plus complexes. Cette évolution s'avère être nécessaire car, s'il est clair à présent qu'une approche empirique donne des résultats intéressants, il est également important de préciser qu'elle s'accompagne de nombreuses contraintes réduisant considérablement son champ d'application. Basée sur des mesures expérimentales, l'approche empirique requiert des ressources importantes en moyens et en temps, ce qui bride la capacité de renouvellement de la bibliothèque de modèles. De plus, la plupart des paramètres géométriques sont fixés. Le modèle paramétré qui en résulte est rigide et limite les degrés de liberté du concepteur. Il nous faut, par conséquent, étendre les résultats à une inductance présentant une géométrie quelconque, et c'est le thème des chapitres suivants.

Références

- [1] *High Frequency Structure Simulator User's Manual*, Ansoft Corporation.
- [2] **J. Craninckx, M. Steyaert**, "A 1.8 GHz Low-Phase-Noise CMOS VCO Using Optimized Hollow Spiral Inductors", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 32, n° 5, May 1997, pp. 736 – 744.
- [3] **E. Frlan**, "Miniature Hybrid Microwave Integrated Circuit Passive Component Analysis Using Computer-Aided Design Techniques", *Master of Engineering Thesis*, Carleton University, August 1989.
- [4] **G. Rabjohn**, "Monolithic Microwave Transformers", *Master of Engineering Thesis*, Carleton University, April 1991.
- [5] **J. Long, M. Copeland**, "The Modeling, Characterization, and Design of Monolithic Inductors for Silicon RF IC's", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 32, n° 3, March 1997.
- [6] **E. PettenPaul, H. Kapusta, A. Weisgerber, H. Mampe, J. Luginsland, I. Wolff**, "CAD Models of Lumped Elements on GaAs up to 18 GHz", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 36, n° 2, February 1988, pp. 294 – 304.
- [7] **A. Chun Ng, L. Chua, G. Ing Ng, C. Law**, "A Simple and Accurate Method of Modeling Spiral Inductor up to Six Times its First Self-Resonant Frequency", *Proceedings of SPIE*, Vol. 4228, 2000, pp. 55 – 62.
- [8] **E. Zencir, N. Dogan, E. Arvas**, "Modeling and Performance of Spiral Inductors in SOI CMOS Technology", *Proceedings of the IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2002, pp. 408 – 411.
- [9] **W. Yin, S. Pan, Y. Gan, L. Li, B. Ooi**, "Global Performance Evaluation of Various On-Chip Square Spiral Inductors on GaAs Substrates", *IEE Proceedings on Circuits, Devices and Systems*, Vol. 150, n° 1, February 2003, pp. 51 – 56.
- [10] **L. Wiemer, R. Jansen**, "Determination of Coupling Capacitance of Underpasses, Air Bridges and Crossings in MICs and MMICs", *Electronics Letters*, Vol. 23, n° 7, March 1987, pp. 344 – 346.
- [11] **A. Watson, P. Francis, K. Hwang, A. Weisshaar**, "Wide-Band Distributed Modeling of Spiral Inductors in RFIC's", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques Symposium Digest*, June 2003, pp. 1011 – 1014.

- [12] **J. Zhao, R. Frye, W. Wei-Ming Dai, K. Tai**, "S Parameter-Based Experimental Modeling of High Q MCM Inductor With Exponential Gradient Learning Algorithm", *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology – Part B*, Vol. 20, n° 3, August 1997, pp. 202 – 210.
- [13] **J. Rabaey**, "The SPICE Page", <http://bwrc.eecs.berkeley.edu/Classes/IcBook/SPICE>.
- [14] *APLAC Reference Manual*, Aplac Solutions Corporation, May 1999.
- [15] **A. Einstein, L. Infeld**, "Le champ, la relativité", *L'évolution des idées en physique*, Paris : Editions Flammarion, Chapitre 3, 1983, pp. 129 – 130.
- [16] **M. Marin**, "Les Résistances", *Cours de Technologie Radioélectrique*, Bruxelles : Editions De Boeck, Chapitre 2, 1947, pp. 39.
- [17] **B.-L. Ooi, D.-X. Xu, P.-S. Kooi, F.-J. Lin**, "An Improved Prediction of Series Resistance in Spiral Inductor Modeling with Eddy-Current Effect", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 50, n° 9, September 2002, pp. 2202 – 2206.
- [18] **C. Yue, S. Wong**, "Physical Modeling of Spiral Inductors on Silicon", *IEEE Transactions on Electron Devices*, Vol. 47, n° 3, March 2000, pp. 560 – 568.
- [19] **J. del Pino, S. Khemchandani, A. Hernandez, J. Sendra, A. Nunez**, "Quality Factor Model for Integrated Inductors in CMOS Technology", *Microwave Engineering*, May 2001, pp. 27 – 34.
- [20] **H. Wheeler**, "Formulas for the Skin Effect", *Proceedings of the I.R.E.*, September 1942, pp. 412 – 424.
- [21] **G. Antonini, A. Orlandi, C. Paul**, "Internal Impedance of Conductors of Rectangular Cross Section", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 47, n° 7, July 1999, pp. 979 – 985.
- [22] **C. Su, L. Chen, S. Chang, B. Tseng, D. Lin, G. Huang, Y. Ho, H. Lee, J. Kuan, W. Wen, P. Liou, C. Chen, L. Leu, K. Wen, C. Chang**, "A Macro Model of Silicon Spiral Inductor", *Solid-State Electronics*, Vol. 46, 2002, pp. 759 – 767.
- [23] **P. Leduc, D. Magnon, F. Guitton**, "Experimental Modeling of Monolithic Resistors for Silicon RF IC's With a Robust Optimizer-Driving Scheme", *Proceedings of the International Conference on Communications Computer and Power*, February 2001, pp. 380 – 385.

-
- [24] *Analog Design Environment, Training Manual, Version 4.4.6*, Cadence Design Systems, January 2001.
- [25] **M. Caulton, S. Knight, D. Daly**, "Hybrid Integrated Lumped-Element Microwave Amplifiers", *IEEE Transactions on Electron Devices*, Vol. 15, 1968, pp. 459 – 466.
- [26] **H. Dill**, "Designing Inductors for Thin-Film Applications", *Electronic Design*, Vol. 12, n° 4, 1964, pp. 52 – 59.
- [27] **J. Crols, P. Kinget, J. Craninckx, M. Steyaert**, "An Analytical Model of Planar Inductors on Lowly Doped Silicon Substrates for Analog Design up to 3 GHz", *Digest of Technical Papers of the Symposium on VLSI Circuits*, 1996, pp. 28 – 29.
- [28] **H. Ronkainen, H. Kattelus, E. Tarvainen, T. Riihisaari, M. Anderson, P. Kuivalainen**, "IC Compatible Planar Inductors on Silicon", *IEE Proceedings on Circuits Devices Systems*, Vol. 144, n° 1, February 1997, pp. 29 – 35.
- [29] **A. Wheeler**, "Simple Inductance Formulas for Radio Coils", *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Vol. 16, October 1928, pp. 1398 – 1400.
- [30] **F. Burkett**, "Improved Designs for Thin Film Inductors", *Proceedings of the Electronic Components Conference, Washington DC*, 1971, pp. 183 – 193.
- [31] **S. Mohan, M. Del Mar Hershenson, S. Boyd, T. Lee**, "Simple Accurate Expressions for Planar Spiral Inductances", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 34, n° 10, October 1999, pp. 1419 – 1424.
- [32] **E. Rosa**, "Calculation of the Self-Inductance of Single-Layer Coils", *Bulletin of the Bureau of Standards*, Vol. 2, n° 2, 1906, pp. 161 – 187.
- [33] **E. Weisstein**, "Median (Statistics)", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Chapman & Hall*, pp. 1155.

Chapitre 3 :

Modélisation d'inductances par la méthode PEEC

"La construction purement mathématique nous permet de découvrir les concepts et les lois qui relient [les éléments irréductibles de base d'une théorie], lesquels nous donnent la clef pour comprendre les phénomènes de la nature. L'expérience peut, bien entendu, nous guider dans notre choix des concepts mathématiques à utiliser; mais il n'est pas possible qu'elle soit la source d'où ils découlent. Si elle demeure, assurément, l'unique critère de l'utilité, pour la physique, d'une construction mathématique, c'est dans les mathématiques que réside le principe vraiment créateur. En un certain sens, donc, je tiens pour vrai que la pensée pure est compétente pour comprendre le réel, ainsi que les anciens l'avaient rêvé."

A. Einstein, "Sur la méthode de la physique théorique".

1. Introduction	87
2. Méthodes numériques	88
2.1. La méthode des différences finies	89
2.2. La méthode des éléments finis	90
2.3. La méthode des moments	91
3. La méthode PEEC	92
3.1. Etablissement de l'équation intégrale	92
3.1.1. <i>Equations de propagation et leurs solutions</i>	92
3.1.2. <i>Régime quasi stationnaire</i>	94
3.1.3. <i>Limitations de la méthode PEEC</i>	96
3.1.3.1 Courants induits dans le substrat	97
3.1.3.2 Effets de capacité	98
3.2. Résolution de l'équation intégrale	98
3.2.1. <i>Discrétisation de l'équation intégrale</i>	98
3.2.2. <i>Formalisme électrique</i>	100
3.3. Application de la méthode PEEC	103
3.3.1. <i>Cas des lignes de transmission</i>	104
3.3.1.1 Le plan de masse coplanaire	105
3.3.1.2 Résistance partielle	106
3.3.1.3 Inductance mutuelle partielle.....	106
3.3.1.4 Inductance propre partielle	107
3.3.2. <i>Cas des inductances</i>	108
3.3.2.1 Boucles circulaires concentriques.....	110
3.3.2.2 Plan de masse coplanaire	111
3.3.2.3 Calcul des éléments de la matrice impédance.....	112
3.3.2.4 Calcul de N_{ik} , approximation de Simpson	115
3.3.2.5 Calcul de L_{ik} , approximation de Lyle	121
3.3.2.6 Calcul de l'inductance propre	124
3.4. Calcul de l'impédance équivalente	125
3.4.1. <i>Maillage des conducteurs</i>	126
3.4.2. <i>Assemblage des conducteurs</i>	134
3.4.3. <i>Inversion de la matrice impédance</i>	138
4. Validation du simulateur	144
4.1. Lignes de transmission	144
4.2. Qualité de l'approximation de Simpson	145
4.3. Confrontation à l'expérience	148
4.3.1. <i>Etude statistique</i>	148
4.3.2. <i>Etude de cas</i>	150
5. Conclusion	154

1. Introduction

Nous avons établi au chapitre précédent un modèle comportemental d'inductance, c'est-à-dire ajusté à partir de mesures expérimentales. Un tel modèle permet une représentation précise des caractéristiques électriques des inductances spiralées. Cette approche n'est cependant valable que si les formules analytiques employées sont structurellement capables de représenter les phénomènes physiques sous-jacents. Cela suppose implicitement que les réponses à modéliser, explicitées en fonction des variables d'intérêts ($W, S, T, R_{int}, N_r, S_g$), doivent être relativement simples. Dans les faits, il est nécessaire de limiter au maximum les variations sur les paramètres géométriques. Ainsi, sur les six paramètres de définition d'une inductance, seuls sont finalement variables le rayon interne R_{int} et le nombre de tours N_r . Lors du développement d'une application Radio-Fréquences, le concepteur est souvent confronté à de lourdes contraintes, qu'il s'agisse de performances électriques ou d'encombrement, nécessitant une étape d'optimisation. Il est alors primordial de maintenir le maximum de degrés de liberté possibles, et donc de s'extraire du carcan comportemental. L'ambition de ce chapitre est en ce sens émancipatrice. Il présente en effet un outil permettant la prédiction, en fonction de la fréquence, du comportement en transmission d'une inductance et ce, quelle que soit sa géométrie.

Un modèle plus général doit tenir compte de phénomènes électromagnétiques beaucoup trop complexes pour donner lieu à des formules analytiques exploitables. Ce modèle découle de la résolution numérique des équations de Maxwell, fondements de l'électromagnétisme, ce qui sous-entend l'utilisation ou le développement d'un simulateur. Après avoir brièvement présenté les principales méthodes de résolution des équations de Maxwell, nous décrirons dans le détail celle que nous avons retenue, à savoir la méthode PEEC ("Partial Element Equivalent Circuit"). Cette méthode extrait l'impédance équivalente en transmission d'un ensemble de conducteurs et s'avère être particulièrement adaptée au traitement de composants planaires. Elle subdivise, dans sa version première, les conducteurs à l'aide de barreaux rectilignes. La spécificité de ce travail est de l'étendre afin d'autoriser une décomposition basée sur des barreaux circulaires. Ceci permet de l'appliquer plus efficacement aux inductances spiralées entourées d'un plan de masse coplanaire, composants présentant une symétrie quasi axiale. Il serait bien dommage, en effet, de ne pas profiter des simplifications apportées par les symétries d'un problème physique lorsque ces dernières sont évidentes, alors que trop souvent, la nature semble s'ingénier à les cacher, avec un malin plaisir [1]...

Changer la géométrie de l'élément de discrétisation des conducteurs ne remet pas en cause la méthode dans ses fondements théoriques, mais impose cependant une réécriture complète de son

expression littérale. Cette étape de formalisation requiert en particulier le calcul analytique de l'interaction magnétique entre deux éléments quelconques de la décomposition. Si celui-ci peut être mené sans approximation dans le cas d'éléments rectilignes, il nécessite dans le cas d'éléments circulaires l'introduction de certaines approximations qui seront explicitées et dont nous tenterons d'évaluer les conséquences sur les résultats obtenus. Le maillage de la structure est ensuite longuement discuté car il conditionne tout à la fois la précision de la solution et le temps de calcul, données importantes du problème. Nous décrirons également dans le détail la procédure d'extraction de l'impédance équivalente en mettant l'accent sur la manière dont est pris en compte l'effet du plan de masse coplanaire. La dernière partie de ce chapitre aborde enfin la validation du simulateur, en le confrontant tout naturellement à la mesure.

2. Méthodes numériques

Les problèmes d'électromagnétisme, sous leur forme la plus générale, se réduisent à la résolution d'un système d'équations différentielles partielles du premier ordre, établi par Maxwell à la fin du 19^{ème} siècle [2]. Celui-ci couple le champ électrique, le champ magnétique ainsi que les sources de champ électromagnétique que constituent densités de charges fixes et mobiles. Toutes ces grandeurs, inconnues du problème, dépendent de trois variables spatiales et d'une variable temporelle. L'électromagnétisme numérique vise à déterminer une solution approchée à ces équations – ou bien à des équations dérivées – satisfaisant au moins partiellement aux conditions limites et initiales, connues. Il existe de nombreuses méthodes de résolution numériques parmi lesquelles nous pouvons citer : la méthode FDTD ("Finite Difference Time Domain") [3], TLM ("Transmission Line Matrix") [4], FEM ("Finite Element Method") [5], BEM ("Boundary Element Method") [6], MoM ("Method of Moments") [7], PEEC ("Partial Element Equivalent Circuit") [8], SDM ("Spectral Domain Method") [9], MoL ("Method of Line") [10,11], MMT ("Mode Matching Technique") [12], TRT ("Transverse Resonance Technique") [13], PCA ("Planar Circuit Approach") [14]... Cette liste n'est évidemment pas exhaustive, chaque famille se déclinant en autant de genres, espèces et variétés plus ou moins exotiques. Nous ne pourrions étudier dans le détail toutes les caractéristiques de cet impressionnant bestiaire et devons nous contenter, en bons naturalistes, d'en dégager les grands traits.

Afin de bien comprendre ce qui distingue les nombreuses méthodes numériques employées en électromagnétisme, il convient en premier lieu de préciser ce qui les unit. Toutes font ainsi intervenir, à un moment ou à un autre, une étape de discrétisation permettant de se ramener à une formulation algébrique du problème, la seule pouvant être traitée par un ordinateur. Elles s'inscrivent de fait dans le cadre mathématique de l'approximation projective qui consiste à exprimer chaque grandeur recherchée comme somme pondérée d'un nombre fini de fonctions

connues, dites "fonctions d'expansion", puis à projeter les équations résultantes sur un second ensemble de fonctions, appelées "fonctions de test". Les différences portent essentiellement sur les aspects suivants : la quantité électromagnétique approchée, la ou les propriétés qu'une solution doit vérifier pour être valide, les fonctions d'expansion et de test utilisées pour représenter la fonction inconnue et enfin, la technique de calcul des coefficients de projection.

Certaines méthodes traitent par exemple directement les équations différentielles de Maxwell [3,4,9,10], alors que d'autres ont pour matière des formes intégrales indirectes [5,6,7,8]. Certaines travaillent dans le domaine temporel [3,4] et d'autres lui préfèrent le domaine fréquentiel [5,6,7,8,9,10]. On distingue également les méthodes qui discrétisent le champ électromagnétique [3,4,5,10], de celles qui discrétisent les sources du champ électromagnétique [6,7,8,9]. Nous allons exposer, dans ce qui suit, les trois paradigmes illustrant parfaitement cette classification, à savoir dans l'ordre : la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des moments.

Il est important de remarquer avant d'aller plus avant qu'il n'existe pas de méthode générale et que chaque méthode a son domaine d'application. Plus le travail analytique réalisé préalablement au traitement numérique est important et plus la méthode sera efficace. Malheureusement, la complexité des équations de Maxwell est telle qu'une résolution analytique même très partielle n'est pas envisageable sans hypothèses simplificatrices, ce qui limite inévitablement la flexibilité de la méthode.

2.1. La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est sans doute l'une des techniques de résolution des équations aux dérivées partielles les plus anciennes. Elle est utilisée dans de nombreuses disciplines depuis plus d'un demi-siècle et a probablement été introduite pour la première fois pour la résolution d'équations non linéaires dans le domaine de l'hydrodynamique. Cette méthode a donné naissance en électromagnétisme à la méthode FDTD, initialement introduite par Yee en 1966 [3], ainsi qu'à la méthode TLM, proposée par Johns et Beurle en 1971 [15], la seconde n'étant autre que la première formalisée d'après les outils mathématiques d'étude des réseaux dispersifs. La méthode FDTD remplace les dérivées spatiales et temporelles apparaissant dans les équations de Maxwell par un ensemble de différences finies, chacune étant définie sur une subdivision de l'espace traité. Il est possible d'interpréter cette discrétisation des opérateurs différentiels comme une projection sur une base de fonctions de type Heaviside.

En travaillant dans le domaine temporel, la méthode FDTD reste très proche des phénomènes à représenter, ce qui facilite l'interprétation des résultats. La réponse fréquentielle peut être obtenue dans un second temps en prenant la transformée de Fourier de la solution temporelle. On met ici en évidence ce qui est sans doute le principal avantage des méthodes temporelles sur les méthodes fréquentielles. Elles permettent en effet d'apprécier en un seul calcul la réponse fréquentielle d'une structure sur toute une plage de fréquences, la largeur de bande étant directement liée au contenu fréquentiel du signal excitateur. De plus, le champ d'application des méthodes temporelles ne se limite pas aux structures invariantes dans le temps et linéaires, c'est-à-dire qui ne dépendent pas de l'intensité du champ électromagnétique [16]. Le maillage ne pouvant être, pour des raisons évidentes, que de dimensions finies, la méthode FDTD s'applique tout naturellement au cas des structures fermées. Elle a cependant été adaptée aux problèmes ouverts grâce aux développements de parois fictives qui permettent d'éviter les réflexions aux frontières du domaine étudié [17,18].

Il est important de noter que les discrétisations spatiale et temporelle sont liées afin d'assurer la stabilité de la procédure de résolution itérative, de Gauss-Siedel [19], communément implémentée dans les simulateurs commerciaux. Ainsi, le pas de temps ne peut-il excéder le temps nécessaire à une onde électromagnétique pour parcourir la plus petite dimension d'un élément du maillage spatial. Cette condition n'est pas sans conséquence dans le cas de structures planaires. En effet, représenter correctement les pertes résistives dans les métallisations requiert un maillage relativement fin de la section de conduction. Il s'ensuit inévitablement une discrétisation hautement non-uniforme de l'espace. Le pas de temps étant imposé par la plus petite cellule du maillage, ceci peut conduire à une considérable augmentation du temps de simulation. En conclusion, la méthode FDTD n'est probablement pas la plus adaptée à l'analyse d'inductances spiralées.

2.2. La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis, notée FEM et formalisée en 1943 par le mathématicien Richard Courant [20] pour l'analyse structurelle, a fait ses premières armes en aéronautique [21]. Elle fut adaptée à l'électromagnétisme par Silvester en 1969 [22]. Cette méthode fréquentielle est fondamentalement différente de la méthode FDTD au sens où elle ne résout pas directement les équations de Maxwell mais minimise une fonctionnelle liée à l'énergie électrique et magnétique du système. La solution est en premier lieu approchée par projection sur un ensemble fini de fonctions de base [23]. Plus précisément, la région pour laquelle on cherche à résoudre les équations de Maxwell est subdivisée en volumes élémentaires, généralement des tétraèdres. Les champs sont représentés sur chaque tétraèdre par une fonction polynomiale, les inconnues étant alors la valeur des champs aux sommets des tétraèdres. Une fonctionnelle, application d'un espace de fonctions vers l'ensemble réel, est une grandeur variationnelle. Cela signifie que ses dérivées partielles par

rapport aux coefficients de projection s'annulent lorsque la distribution de champ dont elle dépend est solution du problème. Il en découle une formulation matricielle aisément résolue par les méthodes classiques. La matrice résultante est, en effet, structurellement creuse c'est-à-dire qu'elle comporte une forte proportion d'éléments nuls. On dispose, en conséquence, de tout un arsenal d'algorithmes – de réordonnement, de factorisation – afin de l'inverser efficacement.

Cette technique appartient à la grande lignée des méthodes de "domaines" car elle conduit, tout comme la méthode FDTD, à mailler tout l'espace. Elle est donc particulièrement adaptée aux problèmes fermés. Le principal avantage de la méthode des éléments finis est sa très grande souplesse, la cellule tétraédrique autorisant un maillage efficace de structures totalement arbitraires. *A contrario*, elle ne permet pas la prise en compte de certaines caractéristiques propres aux géométries planaires ce qui limite considérablement, dans ce cas précis, son efficacité numérique. Une structure planaire peut, en effet, être décrite comme une superposition de couches diélectriques homogènes, les pistes conductrices étant confinées aux interfaces. Cette configuration autorise l'emploi d'une autre famille de méthodes numériques, dites de "frontières", dont nous allons maintenant présenter l'un des membres.

2.3. La méthode des moments

La méthode des moments, notée MoM dans la littérature, a été introduite en électromagnétisme par Harrington [24]. Elle utilise une équation intégrale afin de déterminer la distribution du courant circulant dans un ensemble de conducteurs. C'est la méthode retenue par excellence pour la modélisation d'antennes déposées sur un empilement de couches diélectriques d'extension infinie. Les méthodes intégrales sont en effet particulièrement adaptées à l'étude de structures ouvertes car elles ne maillent que les conducteurs et non pas tout l'espace. En d'autres termes, les variables d'intérêt ne sont pas directement les champs mais les sources de champs, ce qui limite considérablement la dimension numérique du problème. L'effet de l'environnement extérieur est inclus dans les équations par l'intermédiaire des fonctions de Green [25].

Certaines contraintes sur les topologies à résoudre permettent une formulation de l'équation intégrale numériquement exploitable. Les simulateurs dits 2,5D, par exemple, confinent les conducteurs dans des plans parallèles et sont sans doute les membres de la famille MoM ayant rencontrés le plus de succès. Le volume des conducteurs est pris en compte indirectement, à travers une impédance de surface. L'aptitude du modèle associé à représenter le courant volumique dépend de la géométrie de la section de conduction et de la fréquence de travail. Il est néanmoins d'autant plus précis que la conduction a lieu en surface, lieu d'accumulation des charges lorsque la fréquence augmente. Ainsi, une méthode 2,5D sera en toute rigueur pertinente en haute fréquence,

que nous pouvons définir ici comme le domaine fréquentiel pour lequel les courants, circulant dans le volume des conducteurs, sont négligeables. Nous cherchons à caractériser nos composants sur une plage de fréquences dont la limite basse est faible, si ce n'est nulle. Les courants volumiques doivent donc être décrits aussi finement que possible, et c'est la raison pour laquelle nous nous sommes intéressés à une méthode structurellement très proche et complémentaire de la méthode des moments, la méthode PEEC. C'est cette méthode que nous allons détailler à présent en nous attachant à mettre en évidence les différents arguments ayant présidé à son éléction.

3. La méthode PEEC

La méthode PEEC ("Partial Element Equivalent Circuit"), proposée par Ruehli au début des années 70 [8], est une technique de résolution des équations de Maxwell pour un ensemble arbitraire de conducteurs. Il s'agit d'une méthode dite intégrale et nous devons dans un premier temps établir, d'après les équations de Maxwell, les équations intégrales qui relient le potentiel électromagnétique aux densités de charge et de courant dans les conducteurs. Seule l'équation intégrale magnétique est utilisée par la méthode PEEC, et nous tenterons de définir aussi précisément que possible quelles sont les limites induites par cette approximation. Le traitement numérique du problème, basé sur la subdivision des conducteurs en volumes élémentaires, est ensuite présenté. Il permet la transformation de l'équation intégrale en une équation matricielle, que l'on peut en conséquence traiter dans le cadre de l'algèbre linéaire.

Deux cas pratiques seront abordés dans cette partie. Les lignes de transmission présentent un plan de symétrie et peuvent par conséquent être traitées à l'aide de la méthode PEEC conventionnelle, décomposant les conducteurs à l'aide de barres rectilignes. La ligne de transmission est sans aucun doute le composant passif muni d'un plan de masse coplanaire le plus simple que l'on puisse concevoir, ce qui nous a permis de nous assurer que nous traitons correctement ce dernier. Cet exemple nous a, en outre, servi de point de départ au développement d'une méthode PEEC spécifique aux composants présentant un axe de symétrie, ce qui est approximativement vérifié dans le cas des inductances.

3.1. Etablissement de l'équation intégrale

3.1.1. Equations de propagation et leurs solutions

Considérons la structure de la Figure 1, de géométrie quelconque. Elle est constituée d'un matériau conducteur homogène de conductivité σ . Tout l'espace est supposé électriquement et

magnétiquement homogène, isotrope, de permittivité ε et de perméabilité μ . Soit V , son volume total et S , sa surface. L'élément de volume dv autour d'un point P du conducteur est parcouru à l'instant t par une densité de courant $\vec{J}(P,t)$ et possède une charge volumique $\rho(P,t)$. Cet ensemble de sources variables modifie les propriétés de l'espace en un point M , quelconque, ce que l'on représente mathématiquement par la notion de champ électromagnétique. Un champ électromagnétique est défini par un couple de vecteurs : le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ qui dérivent respectivement d'un potentiel scalaire $\Phi(M,t)$ et d'un potentiel vecteur noté $\vec{A}(M,t)$.

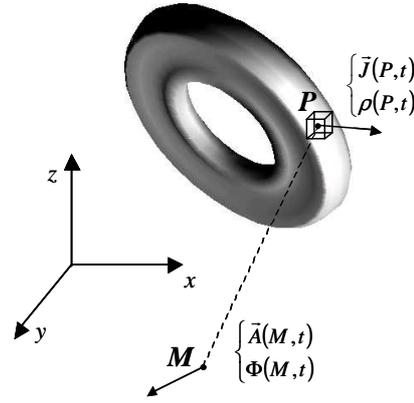


Figure 1 : Position du problème d'électromagnétisme.

Toutes ces grandeurs sont régies par les lois de l'électromagnétisme, qui sont toujours aujourd'hui un sujet de recherche [26]. On obtient à l'aide des équations de Maxwell – Gauss et de Maxwell – Ampère, qui lient respectivement le champ électromagnétique aux charges fixes et mobiles, les équations de propagation des ondes électromagnétiques en tout point M de l'espace. Celles-ci s'écrivent, en adoptant la jauge de Lorentz :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi(M,t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi(M,t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(M,t)}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M,t)] - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}(M,t)}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}(M,t) \quad (3.2)$$

Les expressions ci-dessus sont dites locales au sens où elles sont définies ponctuellement. Il faut cependant garder à l'esprit que les variables électromagnétiques impliquées dépendent implicitement des propriétés de tout l'espace par l'entremise des opérateurs différentiels. Cette dépendance apparaît clairement lorsque l'on a recours à la formulation globale du problème. La solution générale des équations ci-dessus pour une structure arbitraire peut, en effet, être formellement exprimée à l'aide de relations intégrales [27], qui donnent l'expression du potentiel

scalaire $\Phi(M, t)$ et du potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ en un point M quelconque de l'espace et à l'instant t en fonction de la répartition spatiale des sources de champ électromagnétique :

$$\Phi(M, t) = \int_V G_E(MP) \rho(P, t - \tau_p) dv \quad \text{où } MP \text{ est la norme du vecteur } \vec{MP} \quad (3.3)$$

$$\vec{A}(M, t) = \int_V G_M(MP) \vec{J}(P, t - \tau_p) dv \quad (3.4)$$

Les équations que nous venons de rappeler, dites solutions du potentiel retardé, constituent un ensemble compliqué d'équations intégral-différentielles pour un conducteur de structure arbitraire. Ces équations intégrales, vérifiées en tout point M de l'espace, présentent l'avantage de s'exprimer directement en fonction des courants et des charges dans les conducteurs. Cette formulation fait en outre intervenir le temps de propagation de l'onde électromagnétique du point M au point P , τ_p ainsi que les fonctions électrique et magnétique de Green, G_E et G_M .

Décrire dans le détail la théorie mathématique dont ces fonctions émanent dépasse largement le cadre de cette étude. Nous mentionnerons simplement que les fonctions de Green correspondent aux noyaux des opérateurs intégraux de (3.3) et (3.4) – dérivés des équations de propagation, et qu'elles permettent une prise en compte élégante des propriétés électromagnétiques de l'environnement des conducteurs. L'intégration ne porte en effet que sur le volume V des conducteurs et non pas sur tout l'espace, ce qui diminue considérablement la complexité du traitement numérique ultérieur. Les fonctions de Green sont, en général, tensorielles (on parle de fonctions dyadiques [28]), et leur détermination pour des configurations pratiques est loin d'être aisée. Elles constituent à ce titre un sujet de recherche toujours d'actualité [29,30,31]. L'expression des fonctions de Green est extrêmement simple dès lors que l'espace peut être supposé homogène et isotrope :

$$G_M(MP) = \frac{\mu}{4\pi \cdot MP} \quad G_E(MP) = \frac{1}{4\pi\epsilon \cdot MP} \quad (3.5)$$

3.1.2. Régime quasi stationnaire

Le potentiel vecteur et le potentiel scalaire, s'ils caractérisent complètement le comportement en fréquence de la structure, ne nous intéressent pas directement. Nous désirons, en effet, déterminer la réponse électrique de cette dernière et donc les courants et tensions en chaque point du conducteur étudié. Il convient en ce sens de reformuler les solutions retardées afin de faire

explicitement apparaître ces grandeurs. Nous supposons dans ce qui suit une excitation électromagnétique harmonique de pulsation ω , telle que l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) soit vérifiée :

- Le temps de propagation τ_p du signal électromagnétique entre les divers points de la structure étudiée doit être faible devant la durée $T = 2\pi/\omega$ caractéristique de ce signal. En d'autres termes, la longueur d'onde associée doit être grande devant les dimensions du circuit. La longueur d'onde dans le vide est de 5 cm à 6 GHz, ce qui justifie pleinement cette approximation.
- Le temps de relaxation diélectrique τ_r d'un conducteur, c'est-à-dire le temps de réaction du réseau cristallin à une sollicitation électromagnétique, est extrêmement faible ($\tau_r = 40$ fs pour le cuivre) et l'on peut légitimement négliger aux Radio-Fréquences le courant de déplacement devant le courant de conduction. Cela implique la neutralité électrique volumique $\rho(P,t) = 0$, seules des charges surfaciques peuvent exister.
- Enfin, la durée de collision τ_c d'un conducteur qui traduit le temps de réaction des porteurs libres à une sollicitation électrique est également négligeable ($\tau_c = 24$ fs pour le cuivre). La loi d'Ohm locale est en conséquence vérifiée : $\vec{J}(M,t) = \sigma \cdot \vec{E}(M,t)$. Le milieu conducteur est linéaire et isotrope, σ est donc une constante scalaire.

En utilisant respectivement la loi de conservation de la charge ainsi que la loi de Faraday que doit vérifier toute solution aux équations de Maxwell,

$$\frac{\partial \rho(P,t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(P,t) = 0 \quad \text{loi de conservation de la charge} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t} + \vec{E}(M,t) = -\vec{\nabla} \Phi(M,t) \quad \text{loi de Faraday}$$

nous obtenons les équations intégrales électrique (3.7) et magnétique (3.8). Ces deux équations couplées donnent lieu à une formulation intégrale de type MPIE ("Mixed Potential Integral Equation") et sont à l'origine de l'une des nombreuses variantes de la méthode des moments. La seconde, seule, est la base de la méthode PEEC.

$$\frac{\partial \Phi(M,t)}{\partial t} = -\int_V G_E(MP) \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(P,t) dv \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_V G_M(MP) \vec{J}(P,t) dv + \frac{\vec{J}(M,t)}{\sigma} = -\vec{\nabla} \Phi(M,t) \quad (3.8)$$

Nous venons de voir qu'il ne pouvait exister de charge volumique dans le conducteur, ce qui signifie que le courant dans le volume est à divergence nulle. La distribution du potentiel scalaire $\Phi(M,t)$ est donc liée au courant surfacique et non pas volumique. Il s'ensuit un découplage partiel des équations intégrales électrique et magnétique : le comportement dans le volume du conducteur est au premier ordre décrit à l'aide de l'équation (3.8) et les effets dits de capacité à l'aide de l'équation (3.7).

3.1.3. Limitations de la méthode PEEC

L'objectif de ce travail est en premier lieu le développement d'une technique de modélisation efficace d'un plan de masse coplanaire. Les courants volumiques intervenant au premier ordre sur la réponse électrique d'un conducteur, on s'oriente tout naturellement vers la méthode PEEC. La méthode PEEC, qui ne traite que l'équation (3.8), prend en compte les pertes ohmiques ainsi que les pertes induites par le champ magnétique pénétrant dans les métallisations. La distribution du courant, et donc la réponse électrique du composant, s'en trouvent affectées conformément à la loi de Lenz. Un courant variable circulant dans un conducteur génère un champ magnétique qui confine ce dernier en périphérie. Ce phénomène d'auto-induction est connu sous le nom d'effet de peau [32]. Le champ magnétique créé par un courant au voisinage d'un conducteur donné influe également sur la répartition du courant dans celui-ci. Cet effet, dit de proximité, se traduit dans le cas d'une inductance par une localisation des lignes de courant sur la face intérieure des spires internes [33,34].

La méthode PEEC s'accompagne également, et malheureusement, de certaines restrictions. D'une part, elle ne peut structurellement intégrer les effets de capacité puisqu'elle écarte de la résolution l'équation (3.7). D'autre part, la méthode PEEC retient pour les fonctions de Green les expressions données en (3.5), dans sa formulation originelle. Ceci revient à considérer la solution en espace libre, et donc à négliger l'effet du substrat. Nous rappelons que les inductances étudiées sont déposées sur un substrat multicouche dont les propriétés électromagnétiques ne peuvent en toute rigueur être omises aux Radio-Fréquences. Ces hypothèses simplificatrices sont fortes et ne seront pas sans effet sur la précision des résultats obtenus. Il est donc nécessaire à ce stade de clairement identifier les limitations induites, et de s'assurer que les phénomènes non pris en compte par la méthode PEEC peuvent être traités indépendamment, c'est-à-dire dans un second temps. La méthode PEEC constituerait en ce sens la fondation nécessaire à la construction de modèles plus évolués.

3.1.3.1 Courants induits dans le substrat

Nous pouvons nous contenter du point de vue magnétique de la solution en espace libre lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées. D'une part, le substrat ne doit comporter aucun matériau magnétique, la perméabilité relative μ_r étant alors proche de l'unité pour toutes les couches. D'autre part, la conductivité de chaque couche composant le substrat doit être faible afin que les courants de Foucault puissent y être négligés. En effet, le champ magnétique généré par les pistes métalliques provoque l'apparition dans le substrat de courants induits (loi de Lenz). L'intensité de ces courants et donc leur effet, sera d'autant plus faible que la conductivité sera faible. Rappelons ici que les inductances circulaires étudiées sont déposées sur un substrat en verre, matériau non magnétique aux excellentes propriétés isolantes. Les deux conditions sont en conséquence vérifiées dans le cas qui nous concerne et nous pouvons considérer un seul milieu homogène équivalent, tel que $\mu_r = 1$.

Remarquons que, les équations de Maxwell étant linéaires, le principe de superposition s'applique. Ce dernier s'énonce ainsi : le potentiel vecteur magnétique produit par un ensemble de courants est obtenu en additionnant les potentiels produits par toutes les sources élémentaires. Il est en conséquence possible de décomposer dans le cas général le potentiel vecteur en deux composantes :

$$\vec{A}(M, t) = \vec{A}_c(M, t) + \vec{A}_s(M, t) \quad (3.9)$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}_c(M, t)$ est imputable aux courants circulant dans les conducteurs métalliques. Il est donc solution du problème en espace libre. Le potentiel vecteur $\vec{A}_s(M, t)$ est généré, quant à lui, par les courants circulant dans le substrat. Ces deux contributions, ainsi que leur participation respective à la réponse électrique de l'inductance, peuvent être évaluées indépendamment l'une de l'autre [35]. Notons que $\vec{A}_s(M, t)$ peut être considéré comme une perturbation de $\vec{A}_c(M, t)$. En effet, il est engendré par des courants induits qui par définition sont d'intensité plus faible que les courants circulant dans les conducteurs. Il n'est donc pas aberrant pour les raisons que nous venons de présenter de se limiter en première analyse à l'étude du problème en espace libre. Les résultats pourront être ensuite étendus, si nécessaire, aux substrats conducteurs en se basant sur les nombreuses études menées dans ce domaine, qu'il s'agisse de conducteurs rectilignes [36] ou de conducteurs à symétrie circulaire [37,38,39].

3.1.3.2 Effets de capacité

Une description précise des effets capacitifs et des pertes diélectriques passe par l'évaluation de la densité de charge régie par l'équation (3.7). L'utilisation des fonctions de Green en espace libre G_E impose la détermination de la distribution de charges aux interfaces de chaque diélectrique, ce qui est très coûteux en temps de calcul [40]. Cette approche est en général réservée aux géométries diélectriques complexes ne présentant pas de symétries particulières. Dans le cas contraire, il est possible d'intégrer l'effet des différents diélectriques directement dans la structure de la fonction électrique de Green. On parle alors de fonctions de Green modifiées, particulières à chaque configuration. Le calcul est en général mené en considérant le substrat comme un empilement de couches de dimensions transversales infinies ayant des permittivités relatives différentes [30], le milieu étant alors dit ouvert. L'expression générale des fonctions de Green modifiées fait apparaître une intégrale de Sommerfeld [41], hautement singulière, et dont l'évaluation peut être réalisée d'après plusieurs techniques : l'expansion sur des fonctions propres complètes ou partielles [42], et la méthode des images. Ces méthodes donnent lieu à des expressions analytiques très lourdes (une double voire une triple somme infinie) qui de plus, présentent de très mauvaises propriétés numériques (convergence lente).

Nous allons pour notre part négliger dans ce qui suit les effets de capacité, c'est-à-dire les charges à la surface des conducteurs. Cela revient à se placer *stricto sensu* dans le cadre de la magnétostatique. Cette approximation, qui constitue la première étape à l'établissement d'un modèle complet, aura pour conséquence de limiter la portée en fréquence de nos modèles. Il est difficile dans l'absolu d'assigner une valeur à cette borne supérieure car elle dépend de nombreux paramètres. Dans le cas des inductances par exemple, elle est d'autant plus faible que les pistes sont larges et que le nombre de tours N_t est grand. Comme nous le verrons plus loin, les résultats obtenus sont sujets à caution au-delà de 3 GHz lorsque $N_t \geq 4,5$. Au regard de la complexité des phénomènes à représenter, il est clair que les développements ultérieurs devront être réalisés en plusieurs phases : prise en compte d'un milieu externe homogène [43,44], puis d'un substrat homogène [45,46], pour s'achever avec la modélisation d'un substrat stratifié [30,47].

3.2. Résolution de l'équation intégrale

3.2.1. Discrétisation de l'équation intégrale

La résolution numérique de l'équation (3.8), connue en mathématiques comme équation intégrale de Fredholm de seconde espèce [48], est très simple dans le principe. Elle consiste à

réaliser l'intégration sur des éléments de volume suffisamment petits pour pouvoir considérer la norme de la densité de courant circulant dans chaque élément comme constante. La norme de la densité de courant est donc représentée numériquement par une fonction "en escalier" [49]. Cette discrétisation, simplement obtenue d'après la propriété de linéarité de l'intégration, permet une résolution approchée de l'équation à l'aide des outils conventionnels de l'algèbre linéaire. Si le principe est extrêmement simple, la mise en œuvre est moins évidente et implique de nombreux calculs. Nous ne les détaillerons pas ici, par souci de clarté, pour nous contenter d'en donner les grandes lignes. Discrétisons le volume V en n éléments de volume V_k , $k \in [1, n]$.

$$\int_V G_M(MP) \vec{J}(P, t) dv = \sum_{k=1}^n \int_{V_k} G_M(MP_k) \vec{J}(P_k, t) dv_k \quad (3.10)$$

Soit $\vec{J}(P_k, t) = J_k \cdot \vec{u}_k$, où \vec{u}_k est un vecteur unitaire ayant même direction que $\vec{J}(P_k, t)$. On en déduit immédiatement $J_k = \pm \|\vec{J}(P_k, t)\|$. Notons que $\{\vec{u}_k\}$, $k \in [1, n]$, est une base de projection. Le sens des vecteurs \vec{u}_k est, à ce stade de la démonstration, totalement arbitraire.

$$\int_V G_M(MP) \vec{J}(P, t) dv = \sum_{k=1}^n \int_{V_k} G_M(MP_k) J_k \cdot \vec{u}_k dv_k \approx \sum_{k=1}^n J_k \cdot \int_{V_k} G_M(MP_k) \cdot \vec{u}_k dv_k \quad (3.11)$$

L'équation (3.8) est alors évaluée en M_i , point appartenant à l'élément de conducteur de volume V_i , $i \in [1, n]$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \sum_{k=1}^n J_k \cdot \int_{V_k} G_M(M_i P_k) \cdot \vec{u}_k dv_k + \frac{\vec{J}(M_i, t)}{\sigma} = -\vec{\nabla} \Phi(M_i, t) \quad (3.12)$$

$$\text{On définit, comme précédemment, le vecteur } \vec{u}_i = \frac{\vec{J}(M_i, t)}{J_i} \text{ avec } J_i = \pm \|\vec{J}(M_i, t)\| \quad (3.13)$$

En projetant la relation vectorielle (3.12) sur le vecteur \vec{u}_i et en l'intégrant sur l'élément de volume V_i , on obtient l'expression (3.14), ci-dessous. Cette technique de projection, dite de Galerkin standard, utilise des fonctions de test identiques aux fonctions d'expansion. Notons que l'approximation de Galerkin est une projection orthogonale de la solution vraie sur l'espace de fonctions U , généré par $\{\vec{u}_k\}$, lorsque le lemme de Céa est vérifié. L'erreur introduite est alors minimale : la solution obtenue est la meilleure approximation possible pour l'ensemble de projection U retenu. Certaines hypothèses sont néanmoins nécessaires à l'application du théorème et l'on retiendra en particulier la conformité de l'espace des solutions U ainsi que la cohérence de la formulation discrète. Cette dernière condition, qui impose que la solution exacte satisfasse aux

équations discrètes, est d'ailleurs difficile à assurer. Elle implique, en effet, l'intégralité de la procédure de traitement numérique.

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial J_k}{\partial t} \cdot \int_{V_i} \int_{V_k} G_M(M_i P_k) \vec{u}_i \cdot \vec{u}_k dv_k dv_i + \frac{J_i}{\sigma} \cdot \int_{V_i} dv_i = - \int_{V_i} \vec{\nabla} \Phi(M_i, t) \cdot \vec{u}_i dv_i \quad (3.14)$$

L'équation ci-dessus lie la densité de courant J_i traversant la subdivision indiquée i aux densités de courant de l'ensemble de la structure J_k . Il est ici important de remarquer que si les vecteurs \vec{u}_i sont connus, en d'autres termes si la direction de la densité de courant sur chaque subdivision est connue, alors on ne résout plus une équation vectorielle mais une équation scalaire. C'est en soit très intéressant puisque, sous cette hypothèse, seule la norme de la densité de courant J_i reste à déterminer. Ainsi, bien que la méthode PEEC puisse être appliquée à une géométrie tridimensionnelle arbitraire, elle est particulièrement adaptée au cas des structures planaires pour lesquelles il est possible de clairement identifier des directions de conduction privilégiées. L'élément de volume V_k n'est alors plus quelconque, il comporte une section de conduction constante de surface S_k et un profil courbe l_k (Figure 2).

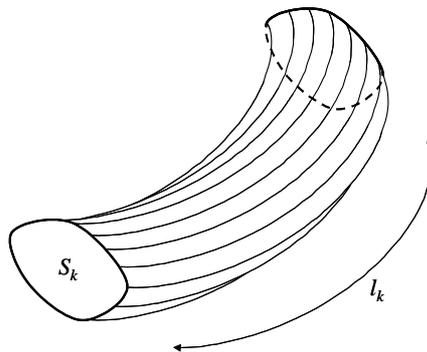


Figure 2 : Volume élémentaire V_k dans le cadre de la méthode PEEC.

3.2.2. Formalisme électrique

L'équation (3.14) peut sembler bien obscure en l'état. Elle devient beaucoup plus intuitive et propice à l'interprétation si l'on considère non plus les densités de courants J_i et J_k mais directement les courants I_i et I_k associés. La relation qui en découle fait alors clairement apparaître un terme résistif ainsi qu'un terme inductif :

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \underbrace{\frac{1}{S_i S_k} \cdot \int_{V_i} \int_{V_k} G_M(M_i P_k) \vec{u}_i \cdot \vec{u}_k dv_k dv_i}_{\text{Terme inductif}} \right\} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial t} + \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sigma S_i^2} \cdot \int_{V_i} dv_i}_{\text{Terme résistif}} \right\} \cdot I_i =$$

$$- \underbrace{\frac{1}{S_i} \cdot \int_{V_i} \vec{\nabla} \Phi(M_i, t) \cdot \vec{u}_i dv_i}_{\text{Tension aux bornes du conducteur } i}$$
(3.15)

Nous introduisons ci-dessous le concept de résistance partielle et d'inductance partielle chère à Ruehli, et qui constitue le cœur de la méthode PEEC dont il est l'auteur. Le terme résistif R_i représente la résistance du conducteur indicé i . Le terme inductif L_{ik} , $k \neq i$, traduit l'inductance mutuelle entre les conducteurs i et j et le terme L_{ii} , l'inductance propre de l'élément i .

$$R_i = \frac{1}{\sigma S_i^2} \cdot \int_{V_i} dv_i \quad \text{Résistance partielle} \quad (3.16)$$

$$L_{ik} = \frac{1}{S_i S_k} \cdot \int_{V_i} \int_{V_k} G_M(M_i P_k) \vec{u}_i \cdot \vec{u}_k dv_k dv_i \quad \text{Inductance partielle} \quad (3.17)$$

$$U_i = - \frac{1}{S_i} \cdot \int_{V_i} \vec{\nabla} \Phi(M_i, t) \cdot \vec{u}_i dv_i \quad \text{Différence de potentiel} \quad (3.18)$$

Nous avons donc exprimé le problème électromagnétique initial sous une forme électrique. La relation (3.19), équivalente à (3.15), n'est finalement qu'une loi d'Ohm généralisée pour l'élément de conducteur i [50]. La méthode PEEC est en ce sens beaucoup plus proche de l'électronique que, par exemple, les méthodes FEM et FDTD, qui nécessitent *a posteriori* un calcul de l'impédance équivalente d'après la répartition des champs.

$$R_i \cdot I_i + \sum_{k=1}^n L_{ik} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial t} = U_i \quad i \in [1, n] \quad (3.19)$$

L'objectif est désormais de déterminer, pour une distribution de potentiel donnée, les courants dans chaque branche du circuit équivalent. Le système ci-dessus est constitué de n équations différentielles du premier ordre couplées. Par conséquent, si l'on impose une excitation – les tensions U_i appliquées aux bornes de chaque élément de conducteur i – harmonique de pulsation ω , la réponse de la structure conductrice – l'ensemble des courants I_i associés – est également harmonique :

$$U_i = \hat{U}_i \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \Rightarrow \quad I_i = \hat{I}_i \cdot \cos(\omega t + \Phi_i) \quad (3.20)$$

Tensions et courants sont entièrement déterminés par les doublets (\hat{U}_i, φ_i) et (\hat{I}_i, Φ_i) respectivement. Chaque couple est l'union d'un terme d'amplitude et un terme de phase, variables réelles qui constituent à ce stade les inconnues du problème. Celui-ci peut être très simplement résolu à l'aide du formalisme cissoïdal et nous reprenons ici la même technique que celle développée dans l'annexe du chapitre 2. Soit :

$$\underline{\hat{U}}_i = \hat{U}_i \cdot e^{j\varphi_i} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{I}}_i = \hat{I}_i \cdot e^{j\Phi_i} \quad (3.21)$$

On construit, sur le modèle de l'équation (3.19), le problème suivant :

$$R_i \cdot \hat{I}_i + j\omega \sum_{k=1}^n L_{ik} \cdot \hat{I}_k = \hat{U}_i \quad i \in [1, n] \quad (3.22)$$

Cette nouvelle formulation est parfaitement équivalente à la précédente, l'équivalence tenant ici à la linéarité de l'opération de différentiation. Les variables complexes $\underline{\hat{U}}_i$ et $\underline{\hat{I}}_i$ deviennent, de fait, les inconnues à déterminer et la solution recherchée peut être directement déduite des relations de passage :

$$I_i = |\underline{\hat{I}}_i| \cdot \cos[\omega t + \arg(\underline{\hat{I}}_i)] \quad U_i = |\underline{\hat{U}}_i| \cdot \cos[\omega t + \arg(\underline{\hat{U}}_i)] \quad (3.23)$$

Notons qu'il s'agit à présent d'un problème linéaire, puisque les équations (3.22) liant les courants circulant dans les différentes subdivisions sont linéaires. Il est en conséquence judicieux d'exprimer l'ensemble de ces n lois d'Ohm couplées sous forme matricielle :

$$[Z_L] \cdot \underline{\hat{I}} = \underline{\hat{U}} \quad (3.24)$$

Le vecteur colonne $\underline{\hat{I}}$, de dimension n , contient les courants traversant chaque subdivision, et le vecteur colonne $\underline{\hat{U}}$, de même dimension, les tensions qui leurs sont appliquées :

$$\underline{\hat{I}} = \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \vdots \\ \hat{I}_i \\ \vdots \\ \hat{I}_n \end{bmatrix} \quad \underline{\hat{U}} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_i \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La relation (3.26) décompose la matrice $[Z_L]$, de dimensions $n \times n$, de manière à faire apparaître la matrice résistance $[R]$ et la matrice inductance $[L]$, dont les expressions sont données en (3.27). Cette formulation du problème est intéressante car elle montre clairement que la résolution du problème peut être séparée en deux phases distinctes.

$$[Z_L] = [R] + j[L]\omega \quad (3.26)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & R_i & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & R_n \end{bmatrix} \quad [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{1i} & \cdots & L_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ L_{i1} & L_{ii} & & L_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ L_{n1} & \cdots & L_{ni} & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

La première étape consiste à calculer les éléments des matrices $[R]$ et $[L]$, quantités qui ne dépendent que de la géométrie de la structure. La première étape de la modélisation est donc indépendante de la fréquence, et n'est par conséquent effectuée qu'une seule fois. Il s'agit là d'un atout de la méthode PEEC. Néanmoins, le calcul des éléments de la matrice $[L]$, c'est-à-dire l'évaluation des couplages magnétiques entre les différentes sections de conducteur, est une opération qui peut être relativement longue. On peut diminuer le temps de calcul en mettant à profit les particularités de $[L]$. En effet, cette matrice est définie positive [51] et possède donc, entre autres, la propriété de symétrie, directement liée à la réciprocité de l'interaction magnétique. Il s'ensuit $L_{ik} = L_{ki}$ pour tout $(i, k) \in [1, n]^2$, ce qui réduit le nombre de calculs à réaliser d'un facteur $(n+1)/2n$.

La matrice impédance lie au niveau microscopique intensité et tension, ce que souligne l'équation (3.24). Nous pouvons interpréter électriquement $[Z_L]$ comme un ensemble de circuits RL "série" non connectés, et on comprend dès lors qu'elle n'est pas suffisante pour déterminer l'impédance équivalente du composant étudié. C'est par l'intermédiaire du vecteur \hat{U} que le réseau électrique est défini, comme nous le verrons en détail par la suite. La seconde étape consiste donc à déterminer pour chaque fréquence les courants \hat{I} circulant dans les conducteurs pour une tension donnée U_{tot} , appliquée aux bornes du composant.

3.3. Application de la méthode PEEC

La méthode PEEC que nous avons adaptée pour traiter les inductances spiralées sera précédée d'une application de la méthode conventionnelle aux lignes de transmission. Nous avons retenu cette approche car elle permet, d'une part, de valider les hypothèses générales liées à la

modélisation d'un plan de masse coplanaire. La ligne de transmission est sans aucun doute l'exemple concret le plus simple possible et constitue à ce titre une excellente référence. D'autre part, ce composant, à symétrie planaire, peut être décrit par la méthode PEEC traditionnelle. Les conducteurs sont alors segmentés en barres volumiques rectilignes de section rectangulaire pour lesquelles il est possible de calculer exactement les couplages magnétiques. L'évaluation de la matrice $[L]$ est donc exempte de toute approximation, ce qui ne sera pas vérifié dans le cas des inductances comme nous le verrons plus loin. On confine ainsi le test aux seules hypothèses concernant le plan de masse. Enfin, une inductance comporte un pont, c'est-à-dire une ligne, assurant le retour du courant depuis le centre de la spirale. Il doit également être modélisé.

Il existe plusieurs simulateurs commerciaux développés autour de la méthode PEEC et susceptibles *a priori* de réaliser cette étude. Nous pouvons citer par exemple les logiciels InCa [52], ou encore ASITIC [53]. Développer notre propre version d'un simulateur PEEC nous permet cependant de nous assurer que les nombreuses fonctions, directement réutilisées lorsque seront abordées les inductances, ont été correctement codées.

3.3.1. Cas des lignes de transmission

Considérons la ligne de transmission de la Figure 3. Cette piste de longueur l , de largeur W , et d'épaisseur T , est soumise à une différence de potentiel U_{tot} . Elle est parcourue par un courant $\vec{I} = I_{tot} \cdot \vec{u}$ qui se répartit ensuite dans un plan de masse coplanaire. Le plan de masse se compose de deux plaques de longueur l également et de largeur W_g . Il est séparé de la ligne de transmission d'une distance S_g . Sa fonction est d'isoler les différents éléments d'un même circuit et d'assurer le retour du courant au générateur. Il y a par conséquent conservation du courant total, les courants $\vec{I}_1 = I_1 \cdot \vec{u}_1$ et $\vec{I}_2 = I_2 \cdot \vec{u}_2$ circulant dans chaque plaque sont tels que : $I_{tot} = I_1 + I_2$.

La polarisation (conventionnelle) de la source permet de définir de proche en proche une polarisation sur chaque conducteur, élément du circuit électrique. Si le sens des vecteurs de projection $\{\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ importe peu, toutes les configurations ne sont pas équivalentes du point de vue de la méthode de résolution. Nous adopterons, pour notre part, la convention suivante : les vecteurs de projection d'un même conducteur sont orientés du pôle positif vers le pôle négatif de celui-ci. Cela permet, nous le verrons plus loin, de grandement simplifier le calcul de l'impédance équivalente.

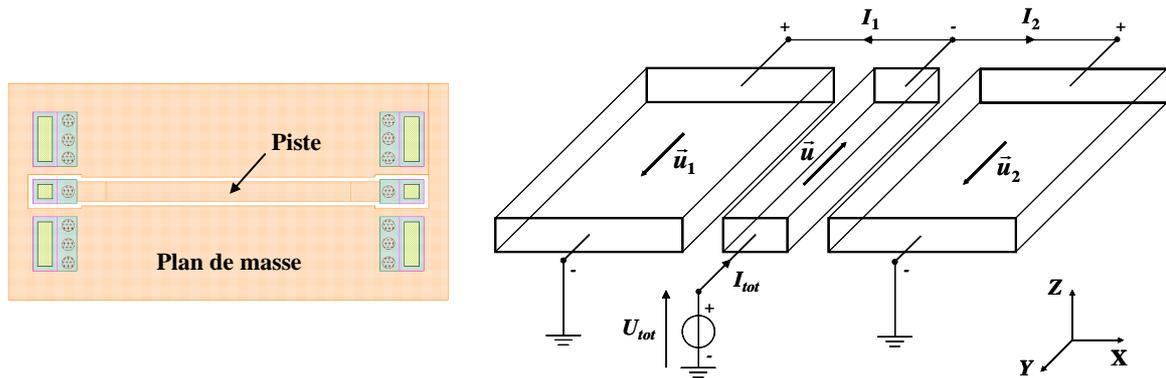


Figure 3 : Ligne de transmission et sa représentation.

Si le plan de masse est ici dans une configuration coplanaire puisqu'il appartient au même niveau de métallisation que la ligne, il peut encore être reporté sur la face arrière du substrat. On parle alors de ligne micro-ruban, très souvent abordée dans la littérature [54]. Un plan de masse sous-jacent peut être simplement modélisé lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées : la première impose que les dimensions du composant soient suffisamment faibles devant les dimensions du plan de masse pour considérer ce dernier comme infini, la seconde veut que la métallisation puisse être supposée parfaite, c'est-à-dire de conductivité σ infinie. On démontre alors que l'effet du plan de masse sur la ligne est équivalent à celui d'une ligne identique parcourue par un courant contraire, et placée symétriquement par rapport au plan. Cette méthode, dite méthode des images [55], est intéressante car elle prend implicitement en compte le plan de masse, ce qui permet, en général, de diminuer la taille du problème à traiter. Elle est malheureusement inapplicable dans le cas d'un plan de masse coplanaire, qui doit en conséquence être maillé.

3.3.1.1 Le plan de masse coplanaire

Si nous supposons une ligne de transmission infiniment longue ($l \rightarrow \infty$), le problème devient bidimensionnel. Nous avons vu au paragraphe 3.1.2 que dans un conducteur, le courant de déplacement pouvait être négligé devant le courant de conduction. Le conducteur est alors équipotentiel dans une section transverse [56], c'est-à-dire dans le plan XZ , et les lignes de courant sont orientées suivant l'axe Y .

L'hypothèse que nous venons de formuler est sujette à caution dans le cas d'un plan de masse de longueur finie car en pratique, la dimension transversale W_g de ce dernier n'est pas négligeable devant la dimension longitudinale l . Considérer une direction de conduction privilégiée dans le plan de masse revient à négliger certains phénomènes bidimensionnels comme par exemple le pincement des lignes de courant auprès des contacts, ces derniers ayant en général des dimensions faibles devant les dimensions de la plaque. La représentation de cet effet de "bord"

nécessiterait en toute rigueur un maillage en treillis, dans les directions X et Y , extrêmement coûteux numériquement. Cet effet, indissociable du motif de mesure, est atténué par l'étape de compensation. La correction n'est cependant que partielle, les motifs de compensation ne pouvant garantir une distribution du courant dans le plan de masse identique à celle ayant cours lors de la mesure. Cette dernière remarque jette d'ailleurs les bases d'une réflexion plus générale quant à la description du plan de masse. En effet, dans un circuit intégré la répartition du courant dans le plan de masse commun va dépendre du circuit global, ce que nous ne pouvons évidemment pas prendre en compte puisque les composants sont caractérisés indépendamment les uns des autres. On met ici clairement en évidence une limite de l'analyse par segmentation, qui suppose implicitement que le plan de masse assure localement sa fonction de retour de courant.

Nous simplifierons le problème dans ce qui suit en supposant qu'il existe dans tous les conducteurs une direction de conduction privilégiée, ce qui implique que la méthode de compensation retenue soit suffisante pour nous affranchir des effets de "bord". Le choix de la géométrie des éléments de volume V_i , $i \in [1, n]$, est dès lors évident. La méthode PEEC discrétise les conducteurs en n barres rectilignes orientées dans la direction Y , de longueur l et de section rectangulaire S_i , $i \in [1, n]$. Une section est définie par sa largeur w_i , et son épaisseur t_i . Nous avons donc à calculer la résistance partielle R_i (3.16), l'inductance mutuelle L_{ik} et l'inductance propre L_{ii} (3.17), pour tous ces éléments.

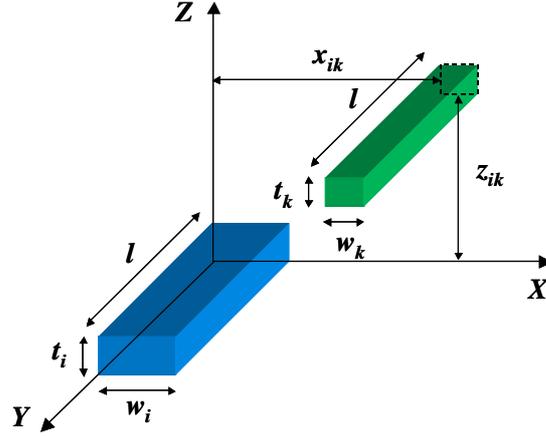
3.3.1.2 Résistance partielle

La résistance R_i d'un conducteur rectiligne de longueur l et de section $S_i = w_i t_i$ a pour expression :

$$R_i = \frac{l}{\sigma w_i t_i} \quad (3.28)$$

3.3.1.3 Inductance mutuelle partielle

L'intégrale (3.17) relative à l'inductance mutuelle partielle peut être exactement supputée dans le cas de deux barres rectilignes de section rectangulaire. Toutes les équations présentées ci-après sont issues des travaux de C. Hoer *et al.* [57]. Les différents paramètres qu'elles impliquent sont précisés Figure 4. Remarquons que ces formules s'appliquent à des conducteurs traversés par des courants constants et de même sens. Si les courants sont de sens opposés les formules sont évidemment les mêmes au signe près.


 Figure 4 : Paramètres de définition de barres rectilignes à section rectangulaire, indicées i et k .

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{w_i t_i w_k t_k} \cdot \left[[f(x, y, z)](x)_{x_{ik}-w_i, x_{ik}+w_k}^{x_{ik}-w_i, x_{ik}+w_k} \right] (y)_{t_k-t_i, t_k}^{-t_i, t_k} \left] (z)_{z_{ik}-l, z_{ik}+l}^{z_{ik}-l, z_{ik}+l} \right. \quad (3.29)$$

$$\left[[f(x, y, z)](x)_{x_2, x_4}^{x_1, x_3} \right] (y)_{y_2, y_4}^{y_1, y_3} \left] (z)_{z_2, z_4}^{z_1, z_3} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{i+j+k} f(x_i, y_j, z_k) \quad (3.30)$$

$$\text{avec } f(x, y, z) = g(x, y, z) + g(y, x, z) + g(z, x, y) \quad \text{et} \quad (3.31)$$

$$g(x, y, z) = \left(\frac{y^2 z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) \cdot x \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) + \frac{1}{60} \cdot (x^4 - 3y^2 z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^3 y z}{6} \arctan \left(\frac{y z}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (3.32)$$

3.3.1.4 Inductance propre partielle

L'inductance propre d'une maille peut être calculée en considérant l'inductance mutuelle entre la maille et elle-même. Si les formules précédentes sont applicables, elles peuvent cependant être simplifiées grâce aux symétries du problème.

$$L_{ii} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{8}{(w_i t_i)^2} \cdot \left[[f(x, y, z)](x)_0^{w_i} \right] (y)_0^{t_i} \left] (z)_0^l \right. \quad (3.33)$$

$$\left[[f(x, y, z)](x)_{x_1}^{x_2} \right] (y)_{y_1}^{y_2} \left] (z)_{z_1}^{z_2} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+j+k+1} f(x_i, y_j, z_k) \quad (3.34)$$

où $f(x,y,z)$ est la même fonction que précédemment. Ne s'agissant pas d'une approximation, elle donne exactement les mêmes résultats que la formule générale tout en simplifiant le codage et en réduisant le temps de calcul. Le nombre de termes $f(x,y,z)$ à évaluer est en effet divisé par un facteur huit.

3.3.2. Cas des inductances

Les inductances les plus couramment employées dans les circuits micro-ondes ont des profils polygonaux ou circulaires. Parmi les inductances polygonales, les inductances carrées, encore appelées "Manhattan", ont fait l'objet de toutes les attentions [58,59,60,61]. Les raisons d'une telle sollicitude ne sont pas très claires, et peut être ce choix est-il tout simplement motivé par le fait qu'une inductance carrée est plus simple à dessiner [62]... D'un point de vue électrique en effet, les inductances "Manhattan" exhibent des performances inférieures aux inductances circulaires. Ces dernières ont, entre autres avantages, une résistance "série" plus faible d'environ 10 % à encombrement équivalent, ce qui permet d'atteindre des coefficients de qualité plus élevés [63].

La méthode PEEC subdivise dans sa version première les conducteurs à l'aide de barreaux rectilignes. Elle est donc tout à fait conseillée dans le cas d'inductances polygonales. Et si les formules que nous avons introduites au paragraphe précédent ne sont pas applicables dans ce cas précis, on pourra avantageusement se référer aux travaux de E. Clavel [64], qui traitent dans le détail le calcul de l'interaction magnétique entre barreaux inclinés. Une décomposition à l'aide de barreaux rectilignes n'est malheureusement pas des plus adaptées dans le cas des inductances circulaires car un enroulement spiralé nécessite de nombreux segments pour être correctement représenté.

Cette dernière remarque est particulièrement vraie lorsqu'un plan de masse coplanaire encadre l'inductance proprement dite. La description précise d'une plaque conductrice, par définition étendue, s'accompagne en effet inévitablement d'un nombre considérable de subdivisions. Ceci peut devenir numériquement problématique lorsque le plan de masse présente en plus un profil complexe. Malheureusement, son influence ne peut être négligée, comme nous allons à présent le démontrer. Cinquante quatre inductances aux géométries diverses ont dans ce but été simulées à l'aide du logiciel commercial Passive Modeler [65], utilisant la méthode PEEC à éléments rectilignes. Chaque inductance est, rappelons-le, définie à l'aide des paramètres géométriques suivants : la largeur de la piste W , l'épaisseur du dépôt T , l'espacement inter-spices S , le rayon interne R_{int} , le nombre de tours N_t , et l'espacement au plan de masse S_g . Les plages de variation de ces paramètres sont données dans le Tableau 1, à titre indicatif.

Paramètre	W (μm)	T (μm)	S (μm)	R_{int} (μm)	N_t	S_g (μm)
Minimum	10	3	10	75	1,5	50
Maximum	50	3	50	300	10,5	200

Tableau 1 : Limites de l'ensemble d'inductances simulé sous Passive Modeler.

Bien que par ailleurs très complet, Passive Modeler n'autorise pas l'introduction d'un plan de masse coplanaire, ce qui nous permet de juger au moins partiellement de l'influence de ce dernier par comparaison à la mesure. Les résultats de cette confrontation, résumés Figure 5, portent uniquement sur l'inductance L_{ac} , obtenue d'après l'extraction d'un modèle électrique compact (cf. chapitre 2). Ils n'en sont pas moins éloquentes : l'erreur moyenne est de 13,3 % et seules 5 % des inductances présentent une erreur inférieure à 5 %. De telles erreurs ne sont pas acceptables, et l'on ne peut de toute évidence omettre le plan de masse.

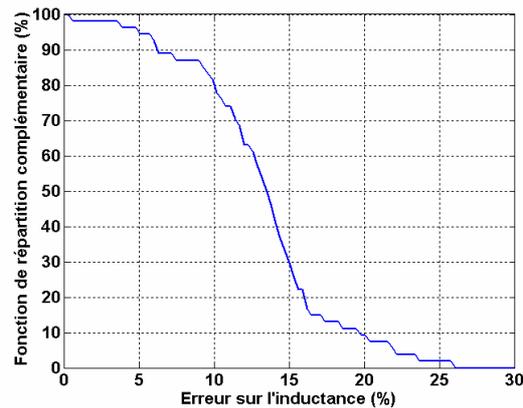


Figure 5 : Analyse statistique de l'erreur relative sur l'inductance extraite L_{ac} , simulations réalisées sur Passive Modeler.

Pour toutes ces raisons, nous allons décliner dans ce qui suit une version de la méthode PEEC spécifiquement dédiée aux composants à symétrie circulaire. Cette version implique une décomposition des conducteurs en anneaux à section rectangulaire, ce qui sous-tend une représentation de la spirale par des boucles circulaires concentriques [66,67]. Nous débuterons la prochaine partie en tentant de mettre en évidence les avantages d'une telle représentation, en particulier en ce qui concerne l'introduction d'un plan de masse coplanaire. Nous poursuivrons ensuite avec l'établissement de l'expression intégrale de l'interaction magnétique entre deux anneaux pour enfin détailler les différentes astuces de calcul permettant une détermination rapide de ce couplage. Cette évaluation n'a pu, en effet, être effectuée de manière rigoureuse, c'est-à-dire analytique. Elle a nécessité certaines approximations que nous exposerons et dont nous vérifierons la qualité.

3.3.2.1 Boucles circulaires concentriques

Nous avons vu, au paragraphe 3.3.1, que le conducteur est équipotentiel dans une section transverse. Le champ électrique et le courant dans le conducteur sont donc, dans le cas d'inductances spiralées, quasiment azimutaux [68]. Une approximation raisonnable consiste à approcher la spirale par des boucles circulaires concentriques associées en série. La norme du courant ne présente plus alors qu'une dépendance radiale et verticale, ce qui nous autorise à décomposer chaque boucle circulaire en anneaux élémentaires. Rien n'implique en effet dans la formulation du problème (3.15) que la subdivision ait un profil rectiligne. Soit R_j^c le rayon interne de la $j^{\text{ème}}$ boucle concentrique, $j \in [1, \lfloor N_t \rfloor + 1]$. Le rayon de chaque boucle concentrique est pris égal au rayon moyen de la spirale au tour correspondant, ce qui donne la formule :

$$R_j^c = R_{\text{int}} + \left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot (W + S) \quad (3.35)$$

Chaque boucle circulaire a par conséquent la même longueur que la spire qu'elle représente. L'approximation sera d'autant plus précise que l'accroissement de la spirale sera faible devant le rayon interne. Il est intéressant de remarquer qu'en adoptant cette démarche, seule la section du conducteur est effectivement maillée. Il s'agit en quelque sorte, pour chaque spire, d'un maillage à deux dimensions finalement beaucoup plus économique. Considérons, afin d'illustrer notre propos, l'exemple de la Figure 6, représentant pour une inductance de $N_t = 2,5$ tours les deux types de décomposition. La division en éléments rectilignes, relativement grossière, nécessite d'ores et déjà $N_s = 8$ segments par spire soit au total $N_r = 20$ éléments alors qu'elle n'implique que $N_c = 3$ segments circulaires.

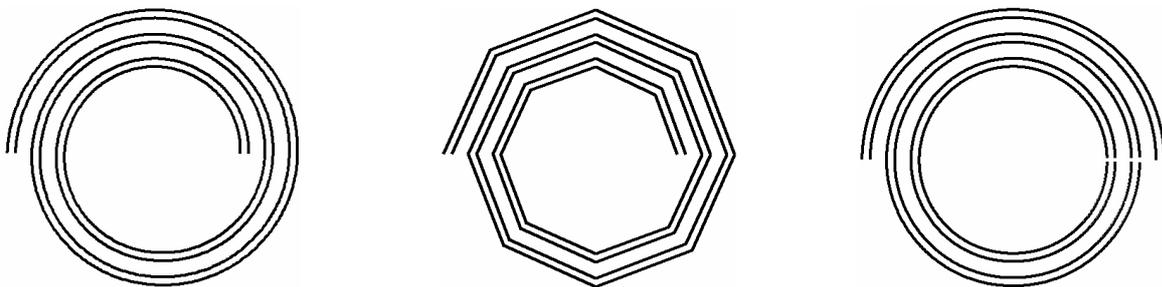


Figure 6 : Un enroulement spiralé et son approximation par des segments rectilignes et des boucles concentriques.

D'une manière plus générale, si l'on appelle r le rapport entre les nombres de mailles induits par une représentation rectiligne et circulaire, respectivement N_r et N_c , on montre que :

$$r = \frac{N_r}{N_c} = \frac{N_s N_t}{\lfloor N_t \rfloor + 1} \quad \frac{N_s}{2} < r < N_s \quad (3.36)$$

A la question : "Combien de segments sont nécessaires à la modélisation correcte d'une inductance spiralee ?", l'étude expérimentale menée par J. Lee *et al.* [69] apporte un premier élément de réponse. Il y est en effet démontré que l'inductance "série" d'un composant octogonal et celle du composant spiralee correspondant, diffèrent de 5 % environ. Adoptant cette valeur comme seuil de précision, nous en déduisons que $N_s = 8$ segments, au moins, doivent être utilisés pour décrire chaque tour de l'enroulement. Ainsi, la dimension de la matrice $[Z_L]$ établie en (3.26) varie, d'après (3.36), d'un rapport 4 à 8 suivant que l'on retienne une représentation par segments rectilignes ou par boucles concentriques. Cela signifie que le nombre de calculs à réaliser est, dans le cadre d'une décomposition de la spirale en boucles circulaires concentriques, de 16 à 64 fois moins important. L'intérêt de cette dernière approche est dès lors évident. On peut, d'une part, espérer accélérer considérablement la résolution du problème. D'autre part, il est possible, à nombre de mailles équivalent, de traiter des structures plus grandes, ce qui aura toute son importance lors de la prise en compte du plan de masse coplanaire.

3.3.2.2 Plan de masse coplanaire

Comme au paragraphe 3.3.1.1, nous simplifions le problème en supposant qu'il existe dans le plan de masse une direction de conduction privilégiée. Les lignes de courant dans le plan de masse sont donc, sous cette hypothèse, à symétrie circulaire et l'on peut en conséquence représenter celui-ci à l'aide de deux boucles circulaires incomplètes. La Figure 7 représente une inductance, notée \mathbf{L} , ainsi que la modélisation retenue. Les caractéristiques géométriques de cette inductance sont les suivantes : $W = 50 \mu\text{m}$, $S = 50 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 150 \mu\text{m}$, $N_t = 1,5$, $S_g = 200 \mu\text{m}$. Nous n'avons pas fait figurer sur le schéma les lignes d'accès et le pont connectant le centre de la spirale, pour plus de clarté. Du point de vue de la résolution du problème, quatre types de conducteurs doivent être distingués : les spires internes (S_i) entières par définition, la spire externe (S_e) qui peut être indifféremment complète ou incomplète, le plan de masse supérieur (M_s) et le plan de masse inférieur (M_i).

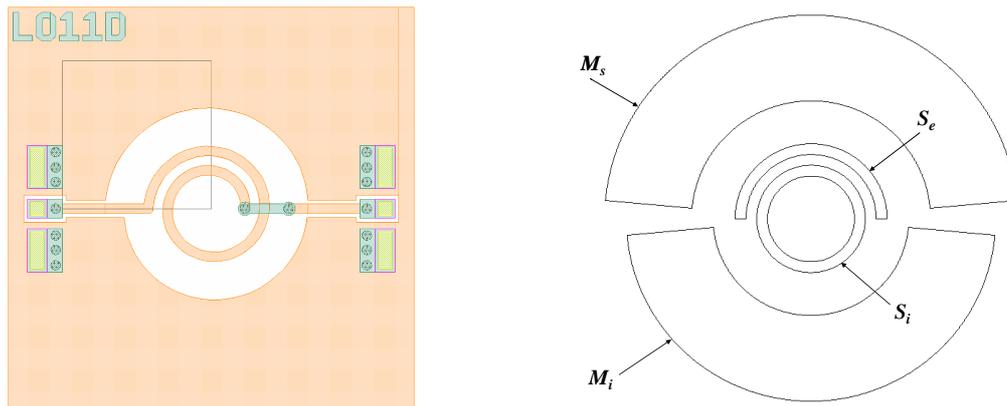


Figure 7 : Approximation circulaire d'une inductance.

Le plan de masse est représenté par deux boucles concentriques. Celles-ci sont nécessaires si l'on désire conserver l'espacement au plan de masse S_g constant. Les deux boucles ne sont pas jointives, et l'ouverture angulaire est choisie telle que l'espacement nécessaire à l'alimentation du composant soit suffisant. Enfin, la finitude du plan de masse, qu'impose tout traitement numérique, nous conduit à introduire ici une variable déjà rencontrée pour les lignes de transmission : la largeur W_g de chaque boucle. Ce paramètre n'est pas ici à proprement parler déterminé. En effet, la géométrie exacte du plan de masse n'est pas respectée et, de toute manière, se distingue de sa configuration dans l'application finale. La valeur affectée à W_g sera choisie suffisamment grande pour pouvoir considérer le plan de masse comme infini, typiquement $W_g = 400 \mu\text{m}$.

3.3.2.3 Calcul des éléments de la matrice impédance

La méthode PEEC, appliquée aux composants quasi circulaires, discrétise les boucles concentriques en n anneaux élémentaires, de rayon r_i et de section rectangulaire de surface S_i , où $i \in [1, n]$. La résistance R_i et l'inductance L_{ii} de chaque barreau circulaire, ainsi que l'inductance mutuelle L_{ik} entre chaque barreau, $(i, k) \in [1, n]^2$, doivent à présent être calculées.

$$R_i = \frac{2\pi \cdot r_i}{\sigma S_i} \quad (3.37)$$

$$L_{ik} = \frac{1}{S_i S_k} \cdot \int_{S_i} \int_{S_k} N_{ik} ds_k ds_i \quad \text{où} \quad N_{ik} = \int_{l_i} \int_{l_k} G_M(M_i P_k) \vec{u}_i \cdot \vec{u}_k dl_k dl_i \quad (3.38)$$

On retrouve avec N_{ik} la formule de Neumann, qui donne l'inductance mutuelle entre deux filaments circulaires l_i et l_k . Ainsi, l'équation (3.38) peut-elle être interprétée comme la moyenne sur les surfaces S_i et S_k des interactions filamenteuses. Cette équation fait clairement apparaître les deux phases nécessaires à la détermination de L_{ik} . La première consiste à établir une forme

analytique exacte ou approchée de N_{ik} et la seconde, à évaluer les deux intégrales de surface. Intéressons-nous, dans un premier temps, au calcul de N_{ik} .

Nous pouvons à ce stade nous interroger sur la réelle signification du concept d'inductance partielle. En effet, comme le soulignait déjà Weber en son temps [8], calculer une inductance mutuelle n'a par définition de sens que s'il est possible de définir des boucles de courant fermées. Or les couplages que nous nous proposons de calculer ici font intervenir des éléments ouverts, comme par exemple la spire externe. Il faut remarquer que l'inductance constitue globalement un circuit magnétique fermé puisque le plan de masse assure le retour du courant. La décomposition, qui conduit à l'introduction de la notion d'inductance partielle, n'est qu'un intermédiaire mathématique qui ne doit pas biaiser l'analyse physique. Pour être complet, notons que les éléments connectiques qui ferment effectivement le circuit magnétique sont supposés négligeables, ils sont représentés électriquement par un court-circuit. Le diagramme de la Figure 8 représente deux filaments circulaires concentriques en vue de dessus. Ils peuvent ou non appartenir à la même boucle. Ils sont définis à l'aide de leurs coordonnées cylindriques dont nous rappelons la définition sur le schéma contigu. Les arcs sont orientés afin de symboliser l'orientation des vecteurs de projection $\{\vec{u}_i\}$, $i \in [1, n]$.

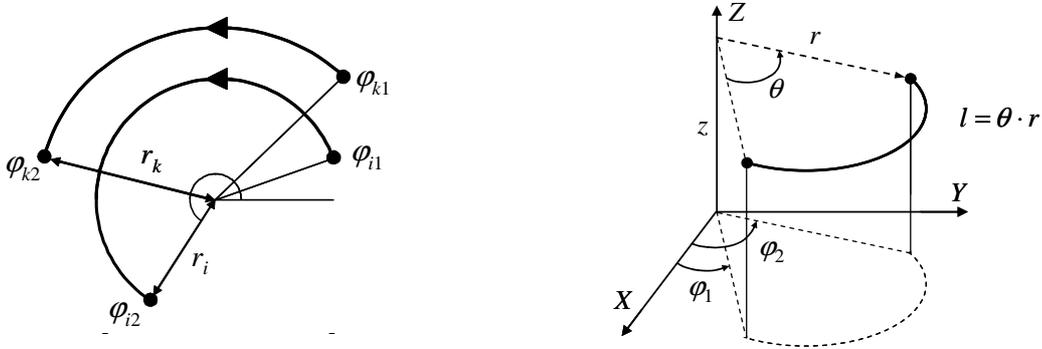


Figure 8 : Coordonnées cylindriques définissant deux fibres circulaires.

L'inductance de Neumann N_{ik} est fonction des grandeurs $\{r_i, \varphi_{i1}, \varphi_{i2}, z_i\}$ et $\{r_k, \varphi_{k1}, \varphi_{k2}, z_k\}$, soit huit paramètres. En injectant l'expression de la fonction magnétique de Green (3.5) dans l'équation (3.38), on obtient :

$$N_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int_{\varphi_{i1}}^{\varphi_{i2}} \int_{\varphi_{k1}}^{\varphi_{k2}} \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_k\|} d\theta_i d\theta_k \quad \text{avec} \quad \vec{r}_i = r_i \cdot \vec{u}(\theta_i) \text{ et } \vec{r}_k = r_k \cdot \vec{u}(\theta_k) \quad (3.39)$$

Si cette double intégrale peut être exprimée analytiquement dans le cas général de bornes d'intégration quelconques, nous devons avouer que nous n'avons pas réussi à le faire. La symétrie

axiale permet néanmoins de simplifier le traitement mathématique du problème puisqu'une des intégrations est réalisable. C'est en ce point précis que réside l'intérêt de l'approximation de l'enroulement spiralé par des boucles concentriques, exposée au paragraphe 3.3.2.1. L'expression qui en résulte, ci-dessous, constitue en ce sens la clé de voûte de notre simulateur [70].

$$N_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \sqrt{r_i r_k} \cdot \int_{\varphi_{k1}}^{\varphi_{k2}} \left[g\left(k_{ik}, \frac{\theta_k}{2} - \frac{\varphi_{i1} + \pi}{2}\right) - g\left(k_{ik}, \frac{\theta_k}{2} - \frac{\varphi_{i2} + \pi}{2}\right) \right] d\theta_k \quad (3.40)$$

$$\text{avec } g(k, \theta) = \left(\frac{2}{k} - k\right) \cdot F(k, \theta) - \frac{2}{k} \cdot E(k, \theta) \quad \text{et} \quad k_{ik} = \sqrt{\frac{4r_i r_k}{(r_i + r_k)^2 + (z_i - z_k)^2}} \quad (3.41)$$

Cette approche est intéressante car elle fait intervenir l'intégrale elliptique incomplète de première espèce F et de deuxième espèce E (3.42), intégrales connues des physiciens depuis fort longtemps. Elles interviennent, en effet, dans de nombreux problèmes de gravitation.

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (k \sin \varphi)^2}} \quad E(k, \theta) = \int_0^\theta \sqrt{1 - (k \sin \varphi)^2} \cdot d\varphi \quad (3.42)$$

La fonction g possède d'innombrables propriétés mathématiques directement liées aux intégrales elliptiques, et dont nous tirerons avantage lors du calcul du coefficient N_{ik} . Elle croît, en outre, avec le module k , est impaire suivant la variable θ , et présente une singularité lorsque $k \rightarrow 1$ et $\theta \rightarrow 2\pi$ simultanément. Il est illusoire, au regard de la Figure 9, d'espérer une formule analytique représentant correctement g sur un large domaine. Peu de formules d'approximation sont d'ailleurs disponibles pour les intégrales elliptiques incomplètes, ce qui nous a conduit à implémenter un algorithme basé sur la transformation de Landen [71], afin de les calculer efficacement.

Précisons que la fonction N_{ik} est alternée : changer le sens du vecteur de projection associé à un filament revient tout simplement à changer le signe de N_{ik} et donc à inverser les bornes d'intégration. Les vecteurs de base $\{\vec{u}_i\}$, $i \in [1, n]$, seront orientés dans ce qui suit d'après la convention retenue au paragraphe 3.3.1, en considérant que le signal d'excitation est appliqué au port droit de l'inductance. Il faut noter que le port utilisé importe peu, le composant étudié étant réciproque. Bien que cela soit loin d'être évident au simple regard de l'équation (3.40), il y a bel et bien réciprocité du couplage mutuel, c'est-à-dire $N_{ik} = N_{ki}$. La démonstration est quelque peu technique, pour ne pas dire pénible. Elle ne figure pas ici afin de ne pas nuire à la lisibilité de l'ensemble.

Bien que l'expression (3.40) ne s'applique en l'état qu'à des filaments, elle fait d'ores et déjà intervenir des objets mathématiques plus complexes que dans la formule (3.29), relative à des barreaux rectilignes. Le maillage par éléments circulaires est au contraire plus simple que son équivalent par éléments rectilignes. Ainsi, tout se passe comme si la complexité globale du problème demeurait constante et qu'elle se partageait entre complexité numérique et analytique, à la manière de l'énergie totale d'un système mécanique qui se répartit entre énergie cinétique et potentielle. Une méthode sera d'autant plus efficace que sa complexité numérique sera faible.

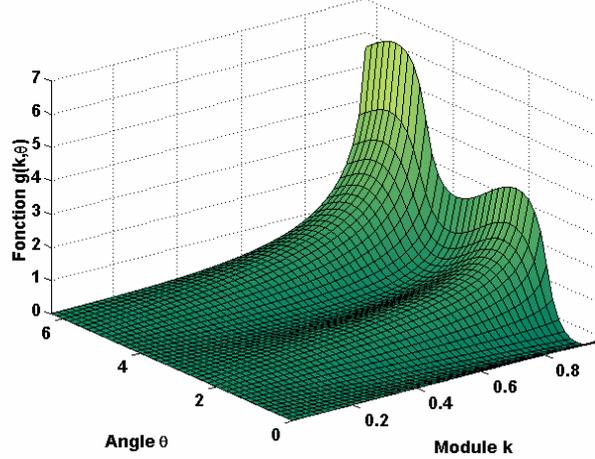


Figure 9 : Représentation de la fonction $g(k, \theta)$ pour $k \in [0, 1[$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

3.3.2.4 Calcul de N_{ik} , approximation de Simpson

Nous allons tenter de déterminer une expression analytique du coefficient N_{ik} , exacte ou approchée, pour les filaments constitutifs des différents types de conducteurs recensés page 112, à savoir : les spires internes (S_i), la spire externe (S_e), le plan de masse supérieur (M_s) et enfin le plan de masse inférieur (M_i). Afin de ne pas alourdir inutilement les relations, nous introduisons le facteur h_{ik} défini comme suit :

$$N_{ik} = \mu \sqrt{r_i r_k} \cdot h_{ik} \quad h_{ik} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\varphi_{k1}}^{\varphi_{k2}} \left[g\left(k_{ik}, \frac{\theta_k}{2} - \frac{\varphi_{i1} + \pi}{2}\right) - g\left(k_{ik}, \frac{\theta_k}{2} - \frac{\varphi_{i2} + \pi}{2}\right) \right] d\theta_k \quad (3.43)$$

Le Tableau 2 rassemble les différentes expressions du facteur h_{ik} associé à deux filaments dont l'un, indicé i , appartient à une spire interne. La première ligne de ce tableau, par exemple, correspond au cas où l'autre filament, indicé k , appartient également à une spire interne ($S_i - S_i$) et la seconde au cas où il est élément de la spire externe ($S_i - S_e$). Les schémas contenus dans la deuxième colonne, que l'on pourra aisément rapprocher de la Figure 8, ont d'une part une fonction illustrative et permettent, d'autre part, de préciser les différentes variables impliquées dans le calcul de h_{ik} . L'angle $\varphi \in [0, 2\pi]$ sera, dans ce qui suit, toujours associé à un filament de S_e : il définit

l'arc externe. L'angle $\lambda \in [0, \pi/2]$, quant à lui, se rapporte à un filament de M_s ou M_i et précise l'ouverture angulaire du plan de masse. Notons enfin que les formules données ci-dessous font systématiquement intervenir la fonction g définie précédemment. Elles sont exactes et n'ont fait l'objet d'aucune approximation, les calculs pouvant, en effet, être menés strictement lorsqu'ils impliquent une spire entière.

Couplage	S_i	Expression de h_{ik}
S_i		$g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.44)$
S_e		$\frac{\varphi_k}{2\pi} \cdot g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.45)$
M_s		$-\frac{\varphi_k - 2\lambda_k}{2\pi} \cdot g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.46)$
M_i		$\frac{2(\pi - \lambda_k) - \varphi_k}{2\pi} \cdot g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.47)$

Tableau 2 : Différentes expressions de h_{ik} , l'un des filaments étant élément de S_i .

Il s'agit à présent de calculer h_{ik} pour un filament de S_e , indicé i , et un filament de S_e , M_s ou M_i , indicé k . Les autres cas relatifs à la spire externe ont été traités précédemment. Dès lors que les deux fibres sont incomplètes, nous n'avons pu calculer exactement h_{ik} . L'utilisation d'un logiciel de calcul formel [72] n'a d'ailleurs pas donné de meilleurs résultats, et nous abandonnons ici l'espoir d'obtenir une expression analytique rigoureuse pour h_{ik} . On sort de cette impasse en approchant l'intégrale à l'aide de la méthode de Simpson [73].

$$h_{ik} \approx \frac{\varphi_{k2} - \varphi_{k1}}{8\pi} \cdot [\mathfrak{Z}(k, \varphi_{i1}, \varphi_{k1}, \varphi_{k2}) - \mathfrak{Z}(k, \varphi_{i2}, \varphi_{k1}, \varphi_{k2})] \quad (3.48)$$

$$\mathfrak{S}(k, \theta, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{3} g\left(k, \frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta + \pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k, \frac{\theta_1 + \theta_2}{4} - \frac{\theta + \pi}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(k, \frac{\theta_2}{2} - \frac{\theta + \pi}{2}\right) \quad (3.49)$$

Cette méthode d'intégration numérique pourra apparaître quelque peu grossière, l'intégrande n'étant évaluée qu'en seulement trois points de l'intervalle d'intégration. Elle présente néanmoins l'avantage de donner lieu à des expressions "concises" et donc manipulables, autorisant par là même les calculs à la main. Cela nous a permis de simplifier autant que faire se peut les expressions regroupées dans le Tableau 3 et donc d'éviter toute redondance lors des calculs numériques. Les temps de calcul observés sont ainsi relativement courts, si on les met en rapport avec la complexité des phénomènes à représenter, ce qui est très important pour ce qui va suivre. Il conviendra bien évidemment de vérifier la pertinence de l'approche retenue.

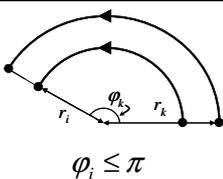
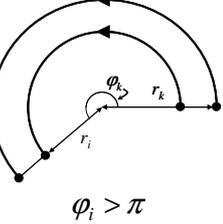
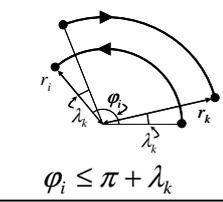
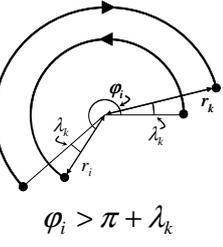
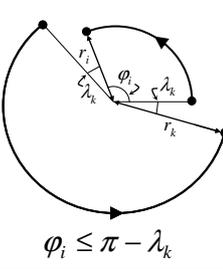
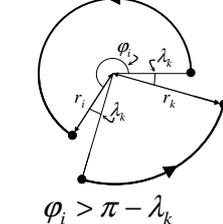
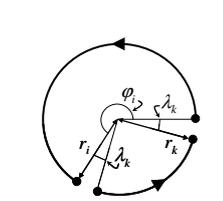
	S_e	Expression de h_{ik}
S_e	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i \leq \pi$</p>	$\frac{\varphi_k}{4\pi} \cdot \left[\frac{5}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_k}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.50)$
S_e	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i > \pi$</p>	$\frac{\varphi_i - \pi}{\pi} g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi - \varphi_i}{4\pi} \cdot \left[\frac{5}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i}{4}\right) \right] \quad (3.51)$
M_s	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i \leq \pi + \lambda_k$</p>	$-\frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{4\pi} \cdot \left[2g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - \lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.52)$
M_s	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i > \pi + \lambda_k$</p>	$-\frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{2\pi} \cdot g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\varphi_i - 2\pi}{4\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - \lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{4}\right) - \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.53)$
M_i	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i \leq \pi - \lambda_k$</p>	$-\frac{\varphi_i}{4\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + \lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + 2\lambda_k}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.54)$
M_i	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i > \pi - \lambda_k$</p>	$-\frac{\varphi_i - 2(\pi - \lambda_k)}{4\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + \lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i}{4}\right) - \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.55)$
M_i	 <p style="text-align: center;">$\begin{cases} r_i = r_k \\ z_i = z_k \end{cases} \Leftrightarrow k_{ik} = 1$</p>	$-\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_i + \lambda_k}{4}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\lambda_k}{4}\right)} \right] - \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \Im m \left[\begin{matrix} \text{Li}_2 \left[j \cdot \tan\left(\frac{\varphi_i + \lambda_k}{4}\right) \right] \\ \text{Li}_2 \left[j \cdot \tan\left(\frac{\lambda_k}{4}\right) \right] \end{matrix} \right] + \sin\left(\frac{\varphi_i + \lambda_k}{2}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \right\} \quad (3.56)$

 Tableau 3 : Différentes expressions de h_{ik} , l'un des filaments étant élément de S_e .

A l'équation (3.56) correspond le cas particulier où les fibres – appartenant aux conducteurs S_e et M_i – présentent le même rayon et la même hauteur, ce qui se traduit par $k_{ik} = 1$. Cette situation peut être rencontrée lorsque l'inégalité $S_g \leq W+S$ est vérifiée. Il est alors possible de calculer exactement l'intégrale h_{ik} . La solution fait intervenir le complexe unité j et la fonction dilogarithme Li_2 [74], définie comme suit et calculée d'après les travaux de C. Osacar *et al.* [75] :

$$Li_2(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i^2} \quad (3.57)$$

L'introduction de l'intégration de Simpson s'accompagne de la perte de la réciprocité du couplage mutuel, l'égalité $h_{ik} = h_{ki}$ n'étant plus vérifiée dans le cas général. Il est important de préciser que cette gênante incohérence physique est uniquement liée à l'approximation, elle est donc totalement artificielle et l'on se rassurera en se rappelant que l'expression (3.43) est, quant à elle, réciproque. Néanmoins, nous avons désormais deux solutions à disposition, h_{ik} et h_{ki} , et se pose naturellement le délicat problème du choix de la solution. On se sort de ce mauvais pas en se remémorant nos lointains cours d'analyse numérique. L'intégration numérique est en effet, à nombre de subdivisions égal, d'autant plus précise que l'intervalle d'intégration est plus faible. Sous ce nouvel éclairage, les deux solutions ne sont plus équivalentes et l'on doit retenir, pour h_{ik} et h_{ki} , l'expression permettant de minimiser cet intervalle, rétablissant ainsi la réciprocité. Cela nous a conduit à distinguer dans le Tableau 3 plusieurs cas qui dépendent des angles de définition des fibres incomplètes impliquées.

Supposons deux filaments i et k tels que $\varphi_i > |\varphi_{k2} - \varphi_{k1}|$. D'après les résultats établis, l'intégration numérique est réalisée sur l'intervalle $[\varphi_{k1}, \varphi_{k2}]$. Cependant, lorsque la condition $2\pi - \varphi_i < |\varphi_{k2} - \varphi_{k1}|$ est remplie, l'équation (3.58) sera avantageusement utilisée en lieu et place de l'équation (3.43). L'intégration numérique porte alors sur l'intervalle complémentaire $[\varphi_i, 2\pi]$, moins large, ce qui améliore en toute rigueur la précision.

$$h_{ik} = \frac{\varphi_{k2} - \varphi_{k1}}{2\pi} \cdot g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\varphi_i - 2\pi} \left[g\left(k_{ik}, \frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_{k1} + \pi}{2}\right) - g\left(k_{ik}, \frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_{k2} + \pi}{2}\right) \right] d\theta \quad (3.58)$$

L'intégrale intervenant dans la relation (3.58) peut être facilement exprimée à l'aide des formules approchées du Tableau 3. Il lui correspond en effet le couplage entre le filament défini par les coordonnées cylindriques $\{r_k, \varphi_{k1}, \varphi_{k2}, z_k\}$ et le filament fictif $\{r_i, 0, \varphi_i - 2\pi, z_i\}$. Cette simple astuce de calcul n'est pas anodine, la largeur de l'intervalle d'intégration maximum étant, en effet, divisée par deux. Ainsi, celui-ci n'est plus $[0, 2\pi[$ mais $[0, \pi]$ et il est obtenu lorsque $\varphi_i = \pi$. Nous

pouvons donc, en toute logique, nous attendre à des résultats globalement moins précis lorsque seront traitées des inductances présentant un nombre de tours demi-entier.

Le Tableau 4 et le Tableau 5 contiennent les expressions de h_{ik} relatives au couplage entre un filament de M_s ou M_i , indicé i , et un autre filament également élément de M_s ou M_i , indicé k . Lorsque les deux fibres n'appartiennent pas au même plan de masse, on peut de nouveau être confronté au cas où ces dernières présentent le même rayon et la même hauteur.

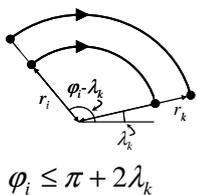
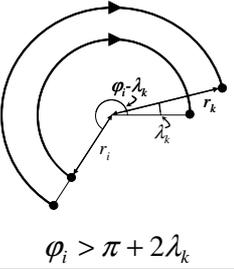
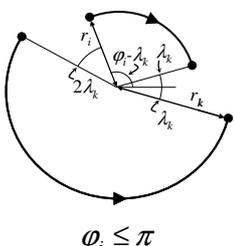
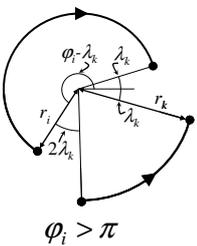
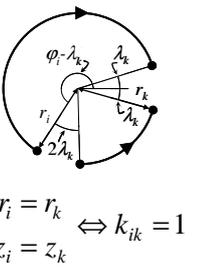
	M_s	Expression de h_{ik}
M_s	 <p>$\varphi_i \leq \pi + 2\lambda_k$</p>	$\frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{4\pi} \cdot \left[\frac{5}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.59)$
M_s	 <p>$\varphi_i > \pi + 2\lambda_k$</p>	$\frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{2\pi} \cdot g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\varphi_i - 2(\pi + \lambda_k)}{4\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{4}\right) + \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.60)$
M_i	 <p>$\varphi_i \leq \pi$</p>	$\frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{4\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - \pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + 2\lambda_k}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \lambda_k - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.61)$
M_i	 <p>$\varphi_i > \pi$</p>	$\frac{\varphi_i - 2(\pi - \lambda_k)}{4\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - \pi}{2}\right) + \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i - 2\lambda_k}{4}\right) - \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \lambda_k - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.62)$
M_i	 <p>$\begin{cases} r_i = r_k \\ z_i = z_k \end{cases} \Leftrightarrow k_{ik} = 1$</p>	$\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{4}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)} \right] + \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \Im m \left[\begin{array}{l} \text{Li}_2 \left[j \cdot \tan\left(\frac{\varphi_i}{4}\right) \right] \\ \text{Li}_2 \left[j \cdot \tan\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \right] \end{array} \right] - \sin(\lambda_k) - \sin\left(\frac{\varphi_i}{2}\right) \right\} \quad (3.63)$

Tableau 4 : Différentes expressions de h_{ik} , l'un des filaments étant élément de M_s .

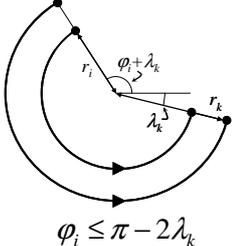
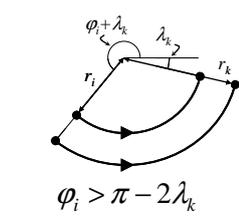
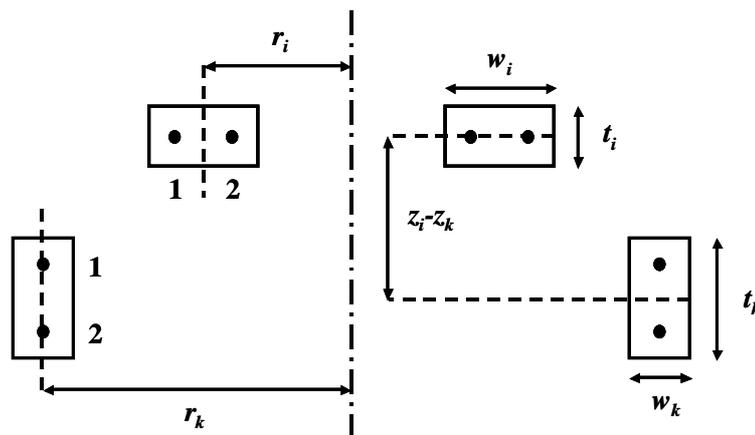
	M_i	Expression de h_{ik}
M_i	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i \leq \pi - 2\lambda_k$</p>	$\frac{2(\pi - \lambda_k) - \varphi_i}{2\pi} \cdot g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\varphi_i + 2\lambda_k}{4\pi} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) - \\ \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + 2\lambda_k}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \\ \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + 2\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right] \quad (3.64)$
M_i	 <p style="text-align: center;">$\varphi_i > \pi - 2\lambda_k$</p>	$\frac{2(\pi - \lambda_k) - \varphi_i}{4\pi} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{5}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\pi}{2}\right) - \\ \frac{4}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + 2\lambda_k}{4}\right) - \\ \frac{1}{3} g\left(k_{ik}, \frac{\varphi_i + 2\lambda_k}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right] \quad (3.65)$

 Tableau 5 : Différentes expressions de h_{ik} , les deux filaments étant éléments de M_i .

3.3.2.5 Calcul de L_{ik} , approximation de Lyle

Considérons le couplage mutuel entre deux anneaux circulaires de section rectangulaire dont les paramètres sont donnés Figure 10. L'anneau, indicé i , est ainsi défini par sa fibre centrale de coordonnées cylindriques $\{r_i^{moy}, \varphi_{i1}, \varphi_{i2}, z_i^{moy}\}$ et les caractéristiques de la section transversale, en l'occurrence la largeur w_i et l'épaisseur t_i . Il en est de même pour le second anneau, seul l'indice (k) change. Remarquons, et c'est important, que ces deux anneaux peuvent indifféremment appartenir ou ne pas appartenir à la même spire.


 Figure 10 : Caractéristiques géométriques de deux barreaux circulaires indicés i et k , coupe transversale.

L'expression du couplage est appelée en (3.66) et découle directement de l'équation (3.38). La tâche à réaliser est donc l'intégration de la formule élémentaire N_{ik} sur toute la section des conducteurs.

$$L_{ik} = \frac{1}{w_i t_i w_k t_k} \cdot \int_{r_i^{moy} - \frac{w_i}{2}}^{r_i^{moy} + \frac{w_i}{2}} \int_{z_i^{moy} - \frac{t_i}{2}}^{z_i^{moy} + \frac{t_i}{2}} \int_{r_k^{moy} - \frac{w_k}{2}}^{r_k^{moy} + \frac{w_k}{2}} \int_{z_k^{moy} - \frac{t_k}{2}}^{z_k^{moy} + \frac{t_k}{2}} N(r_i, \varphi_{i1}, \varphi_{i2}, z_i; r_k, \varphi_{k1}, \varphi_{k2}, z_k) dz_k dr_k dz_i dr_i \quad (3.66)$$

La quadruple intégrale, apparaissant dans l'équation ci-dessus, ne peut être calculée analytiquement et son calcul nécessite en toute rigueur une coûteuse évaluation numérique. On peut cependant obtenir un résultat très précis en remplaçant chaque enroulement élémentaire de section rectangulaire par certains filaments judicieusement choisis. Nous utilisons ici la méthode de Lyle [76,77], où chaque section est remplacée par deux filaments, dont les positions respectives sont données dans le Tableau 6.

Filament	Coordonnées	$t_i \leq w_i$	$t_i > w_i$
1	r_{i1}	$r_{Lyle} + \beta$	r_{Lyle}
	z_{i1}	z_i	$z_i + \beta$
2	r_{i2}	$r_{Lyle} - \beta$	r_{Lyle}
	z_{i2}	z_i	$z_i - \beta$

Tableau 6 : Position des filaments de Lyle.

$$\text{Où : } r_{Lyle} = r_i \cdot \left[1 + \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{\min(w_i, t_i)}{r_i} \right)^2 \right] \quad \beta = \sqrt{\frac{|w_i^2 - t_i^2|}{12}} \quad (3.67)$$

Ainsi l'interaction mutuelle entre deux barreaux se réduit-elle à l'équation (3.68). Précisons une fois encore que cette relation ne fait intervenir que des interactions entre filaments.

$$L_{ik} \approx \frac{1}{4} \cdot [N(r_{i1}, z_{i1}; r_{k1}, z_{k1}) + N(r_{i1}, z_{i1}; r_{k2}, z_{k2}) + N(r_{i2}, z_{i2}; r_{k1}, z_{k1}) + N(r_{i2}, z_{i2}; r_{k2}, z_{k2})] \quad (3.68)$$

La technique qui consiste à remplacer un conducteur par quelques filaments est basée sur la théorie de Taylor des développements limités. Elle a été développée dans le passé, en particulier par Maxwell, principalement pour faciliter les calculs à la main. Les limites de cette approche sont évidentes, et si l'on pressent à ce stade que l'erreur commise sera d'autant plus faible que les dimensions transversales de la section seront faibles devant le rayon, il convient néanmoins de la quantifier aussi précisément que possible.

La méthode de Lyle est valable tant que les termes du développement de Taylor d'ordre supérieur ou égal à quatre peuvent être omis [78]. Ce critère de validité, sans aucun doute très informatif aux yeux des mathématiciens, n'est malheureusement d'aucune utilité pratique en l'état. Il est en conséquence nécessaire d'établir les conditions sur les caractéristiques géométriques des cellules permettant de maintenir l'erreur introduite par l'approximation de Lyle à une valeur acceptable. Nous examinons pour cela le cas plus simple du couplage mutuel entre un filament et un anneau de section rectangulaire, ce qui présente l'avantage de limiter le nombre de variables et donc de faciliter l'analyse. Dans la même optique, la position du filament n'est pas quelconque : il a même rayon ou même altitude que l'anneau. L'inductance mutuelle obtenue en substituant à l'anneau deux filaments de Lyle est ensuite confrontée à celle découlant de l'intégration numérique sur la section de l'anneau. Les résultats de cette étude sont consignés Figure 11.

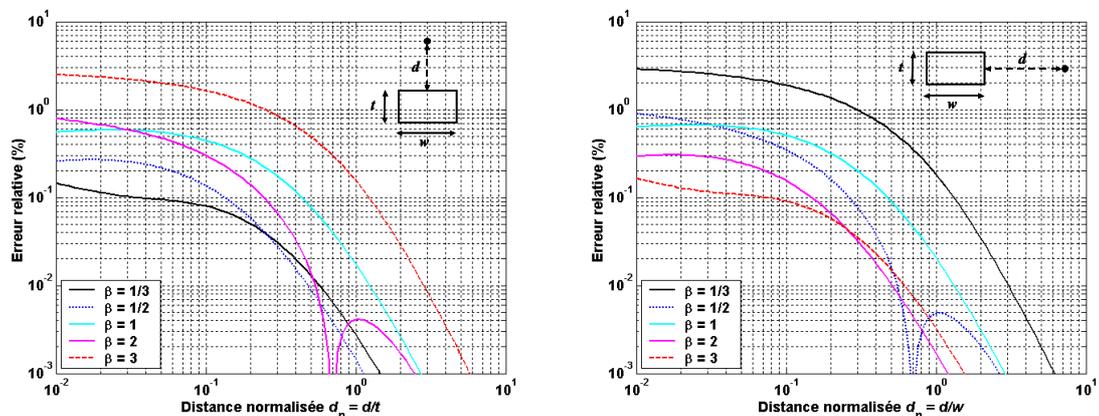


Figure 11 : Erreur relative commise sur l'inductance mutuelle en fonction de la distance à l'anneau.

L'erreur relative (E_r) est quasiment indépendante du rayon tant que ce dernier est grand devant les dimensions transversales des anneaux. Sous cette hypothèse, systématiquement vérifiée, E_r dépend au premier ordre de la distance à l'anneau notée d et du facteur de forme $\beta = w/t$. Remarquons tout d'abord que l'erreur diminue très rapidement avec d . Il apparaît ainsi que l'erreur relative est négligeable dès lors que $d_n > 1$. Nous en déduisons que l'approche que nous avons retenue est parfaitement justifiée puisqu'en première analyse, les seuls couplages pouvant poser problème impliquent des cellules contiguës. Une cellule ayant au maximum six voisines directes, ils représentent une fraction du nombre total d'interactions de l'ordre de $6/n$, où n est le nombre total de mailles. Ajoutons que cette description s'est révélée être particulièrement robuste et efficace. On montre, en effet, qu'une modélisation de la section transversale à l'aide des filaments de Rayleigh [79], impliquant cinq filaments par cellule et donc le calcul de neuf couplages, conduit pourtant à des résultats quatre à cinq fois moins précis.

Dans le cas où le filament et l'anneau ont même rayon, correspondant au premier graphique de la Figure 11, nous remarquons que l'erreur est d'autant plus importante que β est plus grand. Elle dépasse, par exemple, 1 % lorsque $\beta > 2$. La situation est pratiquement symétrique lorsque l'anneau et le filament ont même hauteur et l'on constate alors que E_r diminue avec β . Un facteur de forme supérieur à 1/2 s'accompagne d'une erreur supérieure à 1 %. La capacité des filaments de Lyle à représenter la section de l'anneau n'est donc pas isotrope. Toutes choses étant égales par ailleurs, la qualité de l'approximation de Lyle se dégrade considérablement lorsque le filament est placé orthogonalement à la plus grande dimension transversale.

Nous voyons également clairement se détacher une condition sur le facteur de forme. Il est en effet possible d'associer à un seuil d'erreur étant arbitrairement choisi, une plage de variation pour ce dernier. La condition résultante impose une contrainte supplémentaire sur le maillage de l'inductance. Il doit non seulement assurer sur chaque maille une densité de courant constante mais les mailles jointives, et donc de proche en proche toutes les mailles, ne doivent également pas excéder un certain degré d'asymétrie quantifié par le coefficient β . La contrainte affecte néanmoins en pratique uniquement les mailles à proximité directe, l'erreur devenant négligeable lorsque la distance normalisée est supérieure à un. En conséquence, nous retiendrons pour notre part les inégalités définies en (3.69), bien que celles-ci puissent apparaître particulièrement lâches, au vu de l'erreur potentiellement introduite. Comme nous le verrons ultérieurement, cette règle peut être transgressée sans trop d'impact sur la précision, ce qui rend l'approche de Lyle d'autant plus attractive.

$$\frac{1}{3} < \beta < 3 \Rightarrow E_r \leq 3 \% \quad (3.69)$$

3.3.2.6 Calcul de l'inductance propre

On définit l'inductance propre L_{ii} de la cellule indicée i , $i \in [1, n]$, comme la traduction électrique de l'effet du courant I_i circulant dans cette cellule sur lui-même. Nous abordons également le calcul de l'inductance propre à l'aide de filaments équivalents. Chaque barreau circulaire peut, en effet, être décrit intrinsèquement par deux filaments séparés d'une distance d_{gm} appelée distance géométrique moyenne [58]. Par analogie avec la méthode de Lyle, la disposition relative de ces filaments dépend de la valeur du facteur de forme β , cela afin de respecter au mieux l'aspect de la section S_i . L'inductance mutuelle entre ces deux filaments est égale à l'inductance propre de la cellule :

$$\begin{cases} \beta < 1 \Rightarrow L_{ii} \approx N\left(r_i, z_i - \frac{d_{gm}}{2}; r_i, z_i + \frac{d_{gm}}{2}\right) \\ \beta \geq 1 \Rightarrow L_{ii} \approx N\left(r_i - \frac{d_{gm}}{2}, z_i; r_i + \frac{d_{gm}}{2}, z_i\right) \end{cases} \quad d_{gm} = K \cdot (w_i + t_i) \quad (3.70)$$

Si l'expression exacte de la distance géométrique moyenne d'un conducteur de section rectangulaire est connue, elle reste cependant lourde et difficile à manier [80]. Comme le souligne la Figure 12, la distance géométrique moyenne est quasiment proportionnelle au demi périmètre de la section, et l'on peut, tout en maintenant un excellent niveau de précision, supposer constant le coefficient de proportionnalité K . Ainsi voit-on très souvent dans la littérature $K = 0,2235$ [37].

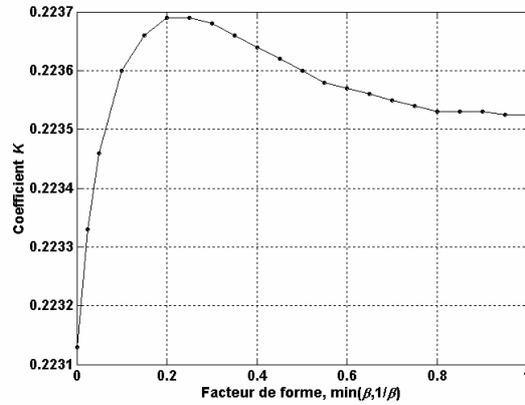


Figure 12 : Coefficient K en fonction du facteur de forme β .

3.4. Calcul de l'impédance équivalente

Nous avons essayé, dans ce qui précède, de formaliser aussi rigoureusement que possible la méthode PEEC dans sa version "circulaire". La structure des subdivisions infinitésimales permettant une décomposition efficace des conducteurs S_i , S_e , M_s et M_i est clairement identifiée. L'expression du couplage magnétique entre les éléments de conducteur est déterminée pour les différentes configurations. Pour autant, la caractéristique électrique en transmission Z de l'inductance reste à déterminer. Nous allons à présent tenter d'établir un passage, espérons-le sans embûche, de la théorie vers la pratique. Seront successivement abordés dans cette partie : la décomposition effective des conducteurs, ce que l'on appelle couramment le maillage, puis le calcul de l'impédance équivalente Z . Ce calcul implique l'inversion de la matrice impédance $[Z_L]$ qui, lorsqu'elle est de grande dimension, requiert des méthodes numériques spécifiques que nous présenterons.

3.4.1. Maillage des conducteurs

L'un des postulats de la méthode PEEC impose que le courant traversant chaque élément de conducteur soit constant. Cette condition, notée C , est en toute rigueur remplie lorsque la section des cellules élémentaires est infinitésimale et ne peut donc, dans la pratique, être vérifiée que de manière approximative. L'établissement de la variante curviligne de la méthode a, d'autre part, nécessité l'introduction d'une contrainte supplémentaire (3.69), liée à l'approximation d'un anneau par quelques filaments circulaires et qui sera désignée par la suite C_β . Notre intention est ici de déterminer un maillage nécessaire et suffisant, c'est-à-dire de mettre en place une technique de décomposition des conducteurs qui soit à la fois compatible avec la contrainte C et C_β .

Nous avons mentionné au paragraphe 3.1.3 que le courant se concentre à la périphérie des conducteurs lorsque la fréquence f du signal d'excitation augmente. L'équation (3.71) donne l'expression de la profondeur de peau δ , distance caractéristique de la pénétration du champ électromagnétique dans les conducteurs. Il s'agit donc là d'une mesure indirecte de la localisation du courant et il devient évident, d'après son expression, que les variations du courant seront d'autant plus fortes que la fréquence sera élevée. Le maillage doit donc être réalisé à la fréquence maximale d'excitation, à savoir $f_{max} = 6$ GHz.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu\sigma\pi f}} \quad (3.71)$$

Le maillage le plus simple, uniforme, implique que les dimensions w et t définissant la section transversale de chaque anneau soient égales. Il sera désigné par l'abréviation M_u dans ce qui suit. La conductivité du cuivre est de $\sigma = 5,26 \cdot 10^7$ S/m et sa perméabilité magnétique $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. La profondeur de peau δ vaut dans ces conditions $0,9 \mu\text{m}$ à $f_{max} = 6$ GHz. Nous adoptons $w = t = 0,5 \mu\text{m}$, soit approximativement deux mailles par profondeur de peau, ce qui semble être un minimum pour une description correcte de la distribution de courant. Considérons l'inductance, notée \mathbf{L} , dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes : $W = 50 \mu\text{m}$, $S = 50 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 150 \mu\text{m}$, $N_t = 1,5$, $S_g = 200 \mu\text{m}$, et enfin $W_g = 400 \mu\text{m}$. Le nombre d'anneaux dans chaque spire (S_i , S_e) est alors de $N_1 = 600$ et dans chaque plan de masse (M_i et M_s) de $N_2 = 4800$. Ainsi, malgré un maillage relativement lâche, nous obtenons au total $N = 10800$ mailles, ce qui interdit tout traitement numérique en un temps acceptable. Il est indispensable d'alléger le maillage.

Nous nous basons pour cela sur quelques remarques de bon sens... L'effet mutuel du plan de masse sur les caractéristiques en transmission d'une inductance est d'autant plus faible que celui-ci est éloigné de l'enroulement spiralé. Le plan de masse n'a ainsi plus d'influence sur l'enroulement lorsque $S_g \rightarrow \infty$, et le résultat devient alors indépendant du maillage de ce dernier. En particulier, peu importe qu'il soit subdivisé dans l'épaisseur. Ainsi, peut-être est-il nécessaire de ne mailler le plan de masse dans l'épaisseur qu'au plus proche de l'inductance spiralée ? Nous devons, pour valider cette conjecture, vérifier qu'elle influe peu sur les caractéristiques propres du plan de masse, dans la mesure où celui-ci assure un retour du courant (§ 3.3.2.2). Tout d'abord, notons que l'inductance propre d'un conducteur est, au premier ordre, imputable au champ magnétique externe [66] ; son évaluation ne requiert donc pas, en toute rigueur, une description précise de la distribution du courant circulant dans ce conducteur. Cet argument n'est évidemment plus valable lorsque l'on considère la résistance propre. Cependant, le plan de masse étant par définition un objet étendu, le courant – qui parcourt le chemin de moindre impédance – doit en conséquence être localisé majoritairement sur la partie interne de ce dernier. En conclusion, il semble raisonnable d'affirmer que le maillage dans l'épaisseur du plan de masse est uniquement nécessaire à proximité directe de l'enroulement spiralé.

Fort des enseignements de cette "expérience de pensée", nous allons séparer chacun des conducteurs M_i et M_s en deux zones. La plus proche de la spirale est maillée dans l'épaisseur (maillage 2D) contrairement à la plus éloignée (maillage 1D). On montre alors que ce maillage par bloc (M_b) induit une erreur négligeable lorsque la largeur W_{2D} de la zone 2D est supérieure ou égale à la largeur de la piste W . Nous prendrons dans ce qui suit $W_{2D} = W$, ce qui permet de diminuer de façon drastique le nombre d'éléments N nécessaire au maillage des conducteurs. Dans le cas de l'inductance \mathbf{L} , nous parvenons de cette manière à $N = 2632$ ($N_2 = 716$), soit une réduction d'un facteur 4 environ par rapport au maillage uniforme.

Si les variations de courant peuvent être très importantes sur le pourtour des conducteurs, elles sont à l'inverse relativement faibles en leur centre. Le maillage uniforme est, de ce fait, loin d'être optimal dans le volume des conducteurs car il surévalue, parfois très largement, le nombre de mailles imposé par la condition C . Dans ses travaux de recherche, E. Clavel [81] introduit le maillage "géométrique" (M_g), ainsi nommé car les dimensions w et t suivent une progression géométrique. Cette répartition non uniforme des mailles permet de rendre compte plus efficacement de la concentration du courant à la périphérie des métallisations. Supposons dans un premier temps que l'on puisse négliger les variations de courant dans l'épaisseur d'un conducteur A , où $A \in \{S_i, S_e, M_s, M_i\}$. Le maillage géométrique est alors entièrement défini par la connaissance de deux paramètres : le quotient α entre la largeur de la plus petite maille et la profondeur de peau d'une part et le facteur d'accroissement k , rapport des tailles de deux mailles consécutives d'autre

part. Soit N_g le nombre total de mailles dans le conducteur A et w_i la largeur de la maille indiquée i , où $i \in [1, N_g]$. On a alors pour un couple (α, k) donné :

$$N_g = 2 \cdot \left[1 + \left[\frac{\ln \left(1 + (k-1) \cdot \frac{W}{2\alpha\delta} \right)}{\ln k} \right] \right] \quad (3.72)$$

$$\begin{cases} w_{i+1} = k \cdot w_i \\ w_{N_g - i + 1} = w_i \end{cases} \quad \text{et} \quad w_1 = \frac{k-1}{k^{N_g/2} - 1} \cdot \frac{W}{2} \quad (3.73)$$

L'établissement de règles de maillage *a priori*, telles que les conditions C et C_β soient simultanément vérifiées, est un problème épineux. Nous traitons en effet une grande variété d'inductances, et l'on conçoit aisément qu'il soit difficile de renseigner les coefficients α et k dans le cas général. L'expérience peut certes être riche en enseignements, mais elle nécessite une laborieuse étape d'apprentissage qui pénalise la réactivité du simulateur vis-à-vis d'un problème nouveau. Nous préférons au maillage "géométrique" un maillage qualifié de "physique" (M_p), car déterminé d'après une simulation préliminaire. Celle-ci est basée sur un maillage géométrique radial (1D), les conducteurs ne sont pas subdivisés dans leur épaisseur. Les paramètres de maillage (α, k) retenus sont $(0,25, 1,25)$ pour l'ensemble des conducteurs : S_i, S_e, M_i, M_s . Cette simulation partielle n'affecte pas le temps de calcul global de manière significative, et produit une distribution radiale approchée du courant. La Figure 13 représente, dans le cas de l'inductance L , le module de la densité de courant moyenne (J_{moy}) à 6 GHz extraite de la pré-simulation, dans les spires et le plan de masse. A ces courbes correspond un courant total (I_{tot}) circulant dans l'inductance de 1 mA. Notons que la distribution du courant est asymétrique. Sa localisation sur la face interne des conducteurs peut être imputée à la courbure des conducteurs ainsi qu'à l'effet de proximité.

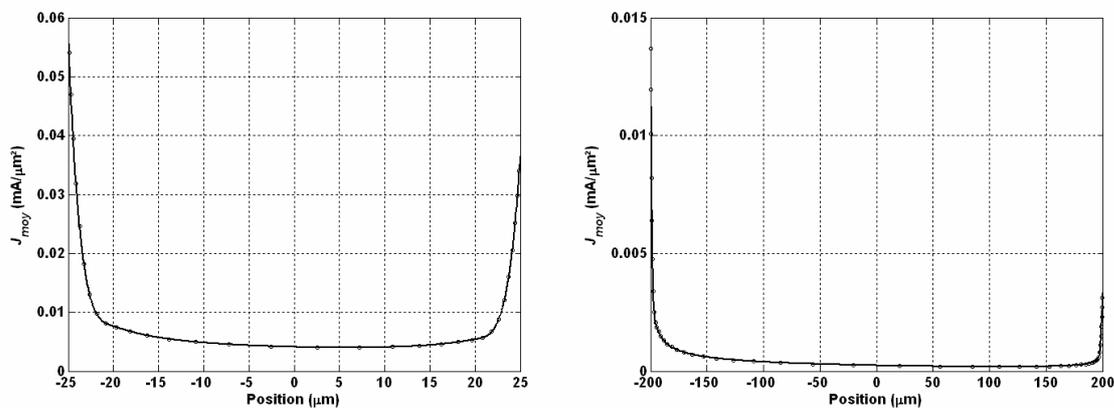


Figure 13 : Densité de courant J_{moy} dans les conducteurs $\{S_i, S_e\}$ et $\{M_i, M_s\}$ de l'inductance L .

Un maillage radial est déduit de la répartition du courant en assurant, pour chaque cellule, une variation relative de la densité de courant J_{moy} inférieure à un seuil ε ainsi qu'un facteur de forme respectant la condition C_β . Il n'est donc pas arbitraire mais justifié par une démarche physique. Notons que les conditions C et C_β ne sont malheureusement pas systématiquement compatibles. La première, fondement de la méthode PEEC, prime alors sur la seconde.

Les portions de conducteurs nécessitant un maillage 2D sont débitées en couches d'épaisseur constante $t = 0,5 \mu\text{m}$. Cette décomposition s'est révélée être largement suffisante, l'effet de peau bidimensionnel n'étant pas trop marqué à 6 GHz. L'assertion que nous venons de formuler est prouvée en comparant un maillage M_p tel que $\varepsilon = 15 \%$ et $t = 0,5 \mu\text{m}$, à un maillage de référence plus fin dans l'épaisseur des conducteurs ($\varepsilon = 15 \%$, $t = 0,25 \mu\text{m}$). La comparaison porte sur un ensemble, noté Λ , de $N = 40$ inductances dont les caractéristiques géométriques sont comprises dans les intervalles reportés Tableau 7.

Paramètre	W (μm)	T (μm)	S (μm)	R_{int} (μm)	N_t	S_g (μm)
Minimum	10	3	10	75	1,5	50
Maximum	50	3	50	275	4,5	200

Tableau 7 : Domaine de définition de l'ensemble d'évaluation Λ .

Chaque simulation est réalisée en $n = 31$ points de fréquence f_j , $j \in [1, n]$, uniformément répartis sur la plage de fréquences 0 – 6 GHz. La procédure de test consiste à calculer, pour cet ensemble d'inductances, les erreurs moyennes (e_R^{moy} , e_L^{moy}) et maximales (e_R^{max} , e_L^{max}) induites sur la résistance $R(f)$ et l'inductance équivalente $L(f)$ par le maillage M_p ($\varepsilon = 15 \%$, $t = 0,5 \mu\text{m}$). Bien que les données à comparer soient parfaitement reproductibles, nous retiendrons, pour quantifier l'erreur, les définitions introduites au premier chapitre et rappelées ci-dessous, ceci par souci de cohérence. Le calcul fait intervenir une intégration numérique sur la plage de fréquences $[f_{min}, f_{max}]$ telle que : $f_{min} = 0$ et $f_{max} = 6$ GHz.

$$e_X^{moy} = \frac{\int_{f_{min}}^{f_{max}} |X_{0,5 \mu\text{m}}(f) - X_{0,25 \mu\text{m}}(f)| \cdot df}{\int_{f_{min}}^{f_{max}} |X_{0,25 \mu\text{m}}(f)| \cdot df} \quad X \in \{R, L\} \quad (3.74)$$

$$e_X^{max} = \frac{\max_{[f_{min}, f_{max}]} |X_{0,5 \mu\text{m}}(f) - X_{0,25 \mu\text{m}}(f)|}{|X_{0,25 \mu\text{m}}(f)|} \quad X \in \{R, L\} \quad (3.75)$$

L'analyse statistique des résultats de la comparaison est consignée Figure 14, qui représente la fonction de répartition complémentaire des erreurs relatives moyennes et maximales, observées sur l'ensemble Λ . Nous invitons ici le lecteur à se reporter au chapitre 2 pour obtenir le détail des informations que l'on peut extraire de ce type de représentation. Nous noterons uniquement, pour notre part, que l'erreur moyenne maximale sur Λ n'excède pas 0,75 % pour la résistance et 0,03 % pour l'inductance équivalente, ce qui justifie pleinement un clivage en couches d'épaisseur $t = 0,5 \mu\text{m}$.

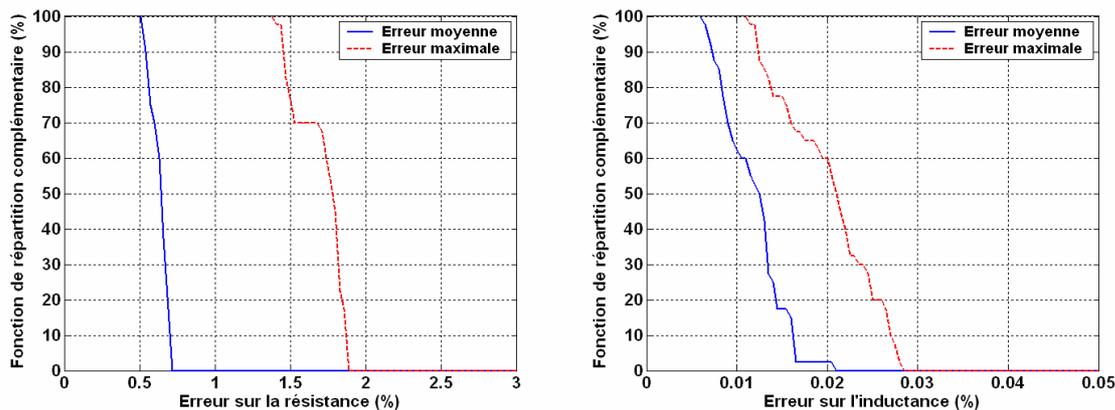


Figure 14 : Analyse statistique de l'écart relatif entre les maillages M_p ($\epsilon = 15 \%$, $t = 0,5 \mu\text{m}$) et M_p ($\epsilon = 15 \%$, $t = 0,25 \mu\text{m}$), sur $R(f)$ et $L(f)$.

Ce résultat est d'ailleurs conforté lorsque l'on s'intéresse aux erreurs globales explicitées par les relations (3.76) et (3.77). Celles-ci font la moyenne des erreurs individuelles calculées pour chaque élément de Λ , ce qui nous permet d'appréhender efficacement, à l'aide de quatre variables uniquement, les différences entre les deux maillages. Les écarts calculés sont de fait relativement faibles avec $E_R^{moy} = 0,63 \%$, $E_R^{max} = 1,71 \%$ d'une part et $E_L^{moy} = 0,01 \%$, $E_L^{max} = 0,02 \%$ d'autre part. Le maillage M_p ($t = 0,5 \mu\text{m}$) peut donc être considéré comme étant à peu près équivalent au maillage M_p ($t = 0,25 \mu\text{m}$). Gardons bien en mémoire les définitions suivantes nous y aurons très souvent recours par la suite.

$$E_X^{moy} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N e_X^{moy}(i) \quad X \in \{R, L\} \quad (3.76)$$

$$E_X^{max} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N e_X^{max}(i) \quad X \in \{R, L\} \quad (3.77)$$

Le maillage "physique" est appliqué à l'inductance \mathbf{L} , tel que la variation de courant sur une cellule n'excède pas $\epsilon = 15 \%$. Nous obtenons un nombre d'anneaux dans chaque spire (S_i , S_e) de

$N_1 = 342$ et dans chaque plan de masse (M_i et M_s) de $N_2 = 702$, soit au total $N = 1386$ mailles. Ainsi, N se voit être réduit d'un facteur 2 environ par rapport au maillage précédent. La Figure 15 représente la fibre moyenne de chaque maille de M_p . On vérifie que le simulateur maille beaucoup plus finement en bordure de conducteur.

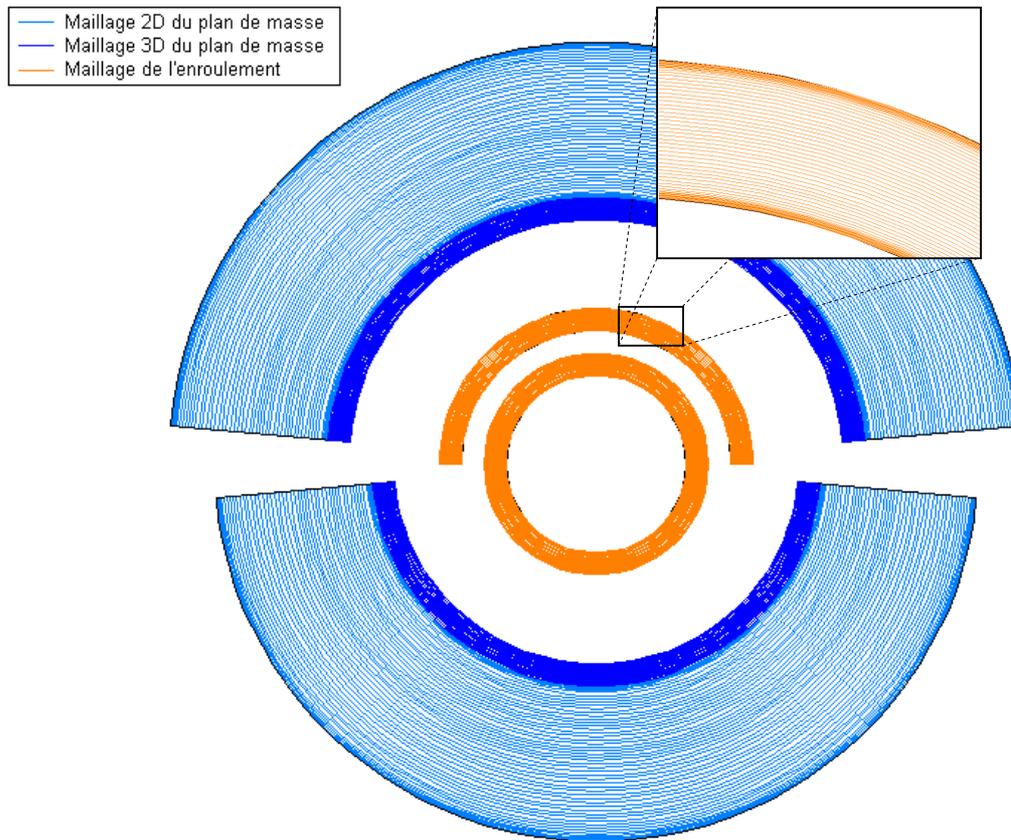


Figure 15 : Représentation des fibres moyennes des cellules issues du maillage physique à 15 %, cas de l'inductance L.

Soit w_n les largeurs de maille de M_g ou M_p , normalisées par rapport à la largeur de maille de M_u ($w = 0,5 \mu\text{m}$). La Figure 16 représente, en fonction de la position relative dans le conducteur, l'inverse de cette grandeur (w_n^{-1}), car elle peut être assimilée à une densité de maille. Lorsque $w_n = 0,5$ par exemple, le maillage examiné (M_g ou M_p) est, à l'abscisse considérée, deux fois plus dense que M_u . On remarque ainsi que les maillages M_g et M_p sont, en bordure de conducteurs, beaucoup plus fins que le maillage M_u . Le maillage physique est d'ailleurs le plus sévère dans cette zone. Ainsi, nous concluons qu'au niveau de précision ε retenu, les décompositions M_u et M_g sont ici trop lâches. A l'inverse, M_p est, au centre des conducteurs, bien plus léger que M_u qui est, de fait, excessif dans cette région. Le maillage physique est en ce sens nécessaire et suffisant, corrélativement au seuil ε .

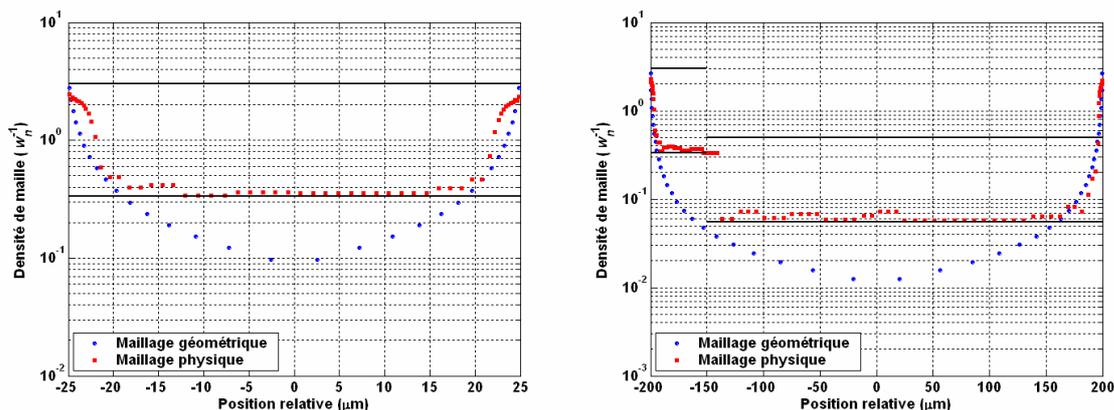


Figure 16 : Densité des maillage M_g et M_p relativement à M_u dans les conducteurs $\{S_i, S_e\}$ et $\{M_i, M_s\}$ de l'inductance L .

Les largeurs normalisées w_n sont, dans ce cas précis, égales au facteur de forme β défini au paragraphe 3.3.2.5. Il est de fait possible de représenter très simplement la contrainte sur le facteur de forme : la densité de maille doit s'inscrire dans le gabarit tracé en noir sur la figure. Nous en déduisons immédiatement que les maillages M_g et M_p ne respectent pas strictement la condition (3.69). On peut légitimement se demander dans quelle mesure les résultats en sont impactés. D'autre part, quelle est l'influence du niveau de précision ε sur la résistance $R(f)$ et l'inductance équivalente $L(f)$? Les réponses à toutes ces questions requièrent la définition d'une référence et nous retenons pour ce rôle le maillage M_b tel que $w = t = 0,5 \mu\text{m}$ dans la région 2D et $w = 3 \mu\text{m}$ dans la région 1D. Toutes les cellules élémentaires vérifient de cette manière $\beta = 1$ et par là même C_β . On compare le maillage M_p à M_b sur l'ensemble Λ , en suivant le protocole précédemment défini. La subdivision de référence pourra sembler quelque peu grossière d'après ce qui a été vu précédemment. Les simulations sont effectuées sur un ordinateur personnel cadencé à 2,4 GHz et équipé de 12 Go de mémoire vive. Les possibilités de cette machine n'autorisent malheureusement pas de maillage beaucoup plus fin sur l'ensemble Λ .

L'écart relatif, sur $R(f)$, entre les maillages M_p et M_b est analysé Figure 17. Nous préférons parler ici d'écart plutôt que d'erreur, notre référence étant sujette à caution. Le Tableau 8, page 134, contient les données statistiques globales associées qui nous sont désormais familières. Il apparaît que les résultats obtenus d'après M_p , avec $\varepsilon = 15 \%$ et $\varepsilon = 10 \%$ respectivement, sont très proches, démontrant la convergence rapide de la valeur de la résistance avec la décroissance du paramètre ε . L'écart moyen observé entre les deux maillages M_p et M_b est ainsi toujours inférieur à 0,75 %, ce qui est tout à fait acceptable. Il nous est impossible de distinguer entre ce qui doit être imputé aux insuffisances de maillage et ce qui est lié à la transgression de C_β . Cependant, l'écart cumulé, relativement faible, laisse penser que la condition C_β est probablement trop forte à l'échelle macroscopique, comme nous le présentons.

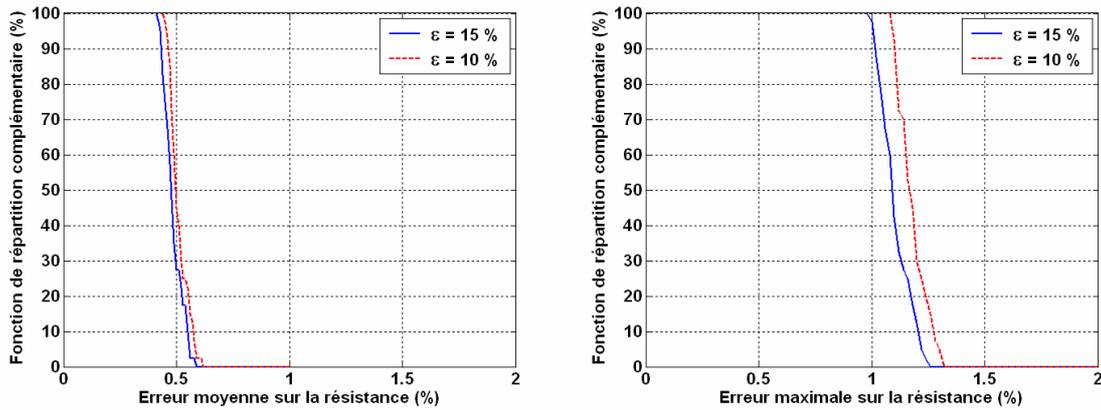


Figure 17 : Analyse statistique de l'écart relatif entre les maillages M_p et M_b sur $R(f)$.

La Figure 18, ci-dessous, donne l'analyse statistique des écarts relatifs recensés, sur l'ensemble Λ , pour l'inductance équivalente. Le maillage physique tel que $\varepsilon = 15\%$, $M_p(15\%)$, engendre un écart maximal sur $L(f)$ par rapport à M_b n'excédant pas 0,05 %, ce qui est négligeable devant les autres sources d'erreurs comme nous le verrons plus loin. Le Tableau 8 conforte ce résultat avec des écarts ne dépassant pas dans tous les cas 0,02 %. Le maillage des conducteurs a donc très peu d'influence sur l'inductance équivalente, ce qui s'explique aisément. En effet, ce dernier conditionne la qualité de la modélisation du courant circulant dans les conducteurs. Or, le courant détermine l'inductance interne, composante qui participe pour moins de 1 % à la valeur totale de l'inductance [66]. Ceci justifie l'ordre de grandeur des écarts constatés. Cette propriété est très intéressante. En effet, si seule la valeur de l'inductance est désirée, l'utilisateur pourra adopter un maillage très léger, induisant des temps de simulation courts, sans pour autant dégrader la précision de la prédiction.

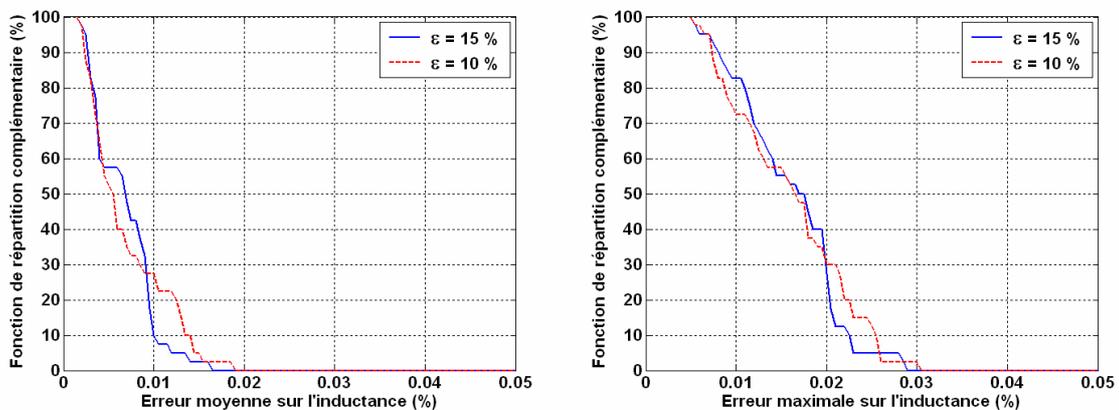


Figure 18 : Analyse statistique de l'écart relatif entre les maillages M_p et M_b sur $L(f)$.

Si les maillages $M_p(15\%)$ et $M_p(10\%)$ sont quasiment équivalents du point de vue de la précision, les différences sont en revanche beaucoup plus marquées en ce qui concerne la rapidité

du simulateur. En effet, $M_p(15\%)$ divise par 4,8 en moyenne les temps de simulation par rapport à M_b . Ce facteur tombe à 2,6 lorsque $M_p(10\%)$ est employé. Le léger gain en précision théoriquement apporté par $M_p(10\%)$ ne justifie pas, à notre avis, les calculs supplémentaires concomitants et nous retenons pour cette raison le maillage physique à 15 %. Ce choix pourra sembler arbitraire à ce stade. Le temps de simulation s'avèrera néanmoins être une donnée importante au chapitre suivant.

Finesse ϵ (%)	E_R^{moy} (%)	E_R^{max} (%)	E_L^{moy} (%)	E_L^{max} (%)
15	0,48	1,10	0,01	0,02
10	0,51	1,18	0,01	0,02

Tableau 8 : Comparaison du maillage M_p par rapport au maillage à M_b , en fonction du paramètre ϵ .

3.4.2. Assemblage des conducteurs

L'objet de ce chapitre est, rappelons-le, l'obtention d'un dipôle équivalent Z traduisant les caractéristiques électriques en transmission de l'inductance. Cette impédance équivalente, qui dépend de la fréquence f , relie le courant I_{tot} circulant dans l'inductance à la tension U_{tot} appliquée à un port. Elle comporte deux composantes, l'impédance de l'enroulement spiralé et du plan de masse $Z_{sm}(f)$ d'une part, l'impédance des lignes d'alimentation $Z_l(f)$ d'autre part. Nous allons présenter dans cette partie les différentes étapes nécessaires au calcul de $Z(f)$ d'après les matrices impédance associées aux conducteurs curvilignes et rectilignes. Elles réalisent en quelque sorte le passage du microscopique vers le macroscopique. Celui-ci est d'ailleurs, une fois n'est pas coutume, relativement aisé. La convention d'orientation des vecteurs $\{\vec{u}_i\} - i \in [1, n]$, retenue au paragraphe 3.3.2.4, permet en effet d'appliquer aux tensions et courants les règles de composition couramment utilisées en électricité dans le cadre de la théorie des réseaux de Kirchhoff. Le calcul de $Z(f)$ devient alors élémentaire puisqu'il se réduit à de simples sommes, comme nous allons le voir à présent.

Soit une inductance comportant N_t tours. Dans le cas général où N_t n'est pas un nombre entier, on pose $n_e = \lfloor N_t \rfloor + 1$. La spirale peut alors être décomposée en $n_e - 1$ spires internes (S_i) et une spire externe (S_e). Le plan de masse coplanaire est, quant à lui, modélisé à l'aide de deux boucles concentriques incomplètes, M_s et M_i . La méthode PEEC, telle que nous l'avons mise en place, subdivise chaque conducteur de type S_i et S_e en N_1 anneaux à section rectangulaire et chacun des conducteurs M_s et M_i , en N_2 anneaux. L'équation matricielle (3.24) établit une relation entre les courants circulant dans chaque élément de conducteur et les tensions appliquées à leurs bornes.

Courants et tensions sont regroupés en deux vecteurs I et U , dont l'architecture est précisée par les relations (3.78) et (3.79).

$$U^T = \left[\underbrace{U_1 \cdots U_{N_1}}_{S_i} \cdots \underbrace{U_{(n_e-1)N_1+1} \cdots U_{n_e N_1}}_{S_e} \underbrace{U_{n_e N_1+1} \cdots U_{n_e N_1+N_2}}_{M_s} \underbrace{U_{n_e N_1+N_2+1} \cdots U_{n_e N_1+2N_2}}_{M_i} \right] \quad (3.78)$$

$$I^T = \left[\underbrace{I_1 \cdots I_{N_1}}_{S_i} \cdots \underbrace{I_{(n_e-1)N_1+1} \cdots I_{n_e N_1}}_{S_e} \underbrace{I_{n_e N_1+1} \cdots I_{n_e N_1+N_2}}_{M_s} \underbrace{I_{n_e N_1+N_2+1} \cdots I_{n_e N_1+2N_2}}_{M_i} \right] \quad (3.79)$$

Il a été précédemment montré que les surfaces équipotentielles sont, dans un conducteur, parallèles à la section transversale. Nous en déduisons que les extrémités des boucles concentriques sont équipotentielles et donc que les tensions aux bornes des anneaux d'un même conducteur sont égales. Le vecteur U a par conséquent la structure particulière indiquée en (3.80). Notons dès à présent que les tensions aux bornes de M_s et M_i sont identiques. En effet, les inductances intégrées sont caractérisées à l'aide de pointes GSG ("Ground Signal Ground") qui comportent, comme leur nom l'indique, deux pointes de masse. Celles-ci assurent, à chaque port, la même référence de potentiel de part et d'autre du plan de masse. M_s et M_i peuvent en conséquence être traités comme un seul et même conducteur, noté $M_s M_i$.

$$U^T = \left[\underbrace{U_1 \cdots U_1}_{S_i} \cdots \underbrace{U_{(n_e-1)N_1+1} \cdots U_{(n_e-1)N_1+1}}_{S_e} \underbrace{U_{n_e N_1+1} \cdots U_{n_e N_1+1}}_{M_s} \underbrace{U_{n_e N_1+1} \cdots U_{n_e N_1+1}}_{M_i} \right] \quad (3.80)$$

Soit le vecteur U_r , de dimension n_e+1 , contenant les tensions aux bornes des n_e-1 spires internes, de la spire externe et du plan de masse unifié. Les n_e+1 courants circulant dans ces conducteurs composent le vecteur I_r . Ils sont calculés en sommant toutes les contributions microscopiques, c'est-à-dire l'ensemble des courants traversant les anneaux élémentaires d'un même conducteur. L'expression générale des vecteurs U_r et I_r est donnée ci-dessous. Leur formulation particulière, dans le cas de l'inductance \mathbf{L} , est explicitée Figure 19, pour exemple.

$$U_r^T = \left[U_1 \cdots U_{(n_e-1)N_1+1} U_{n_e N_1+1} \right] \quad (3.81)$$

$$I_r^T = \left[\sum_{k=1}^{N_1} I_k \quad \cdots \quad \sum_{k=(n_e-1)N_1+1}^{n_e N_1} I_k \quad \sum_{k=n_e N_1+1}^{n_e N_1+2N_2} I_k \right] \quad (3.82)$$

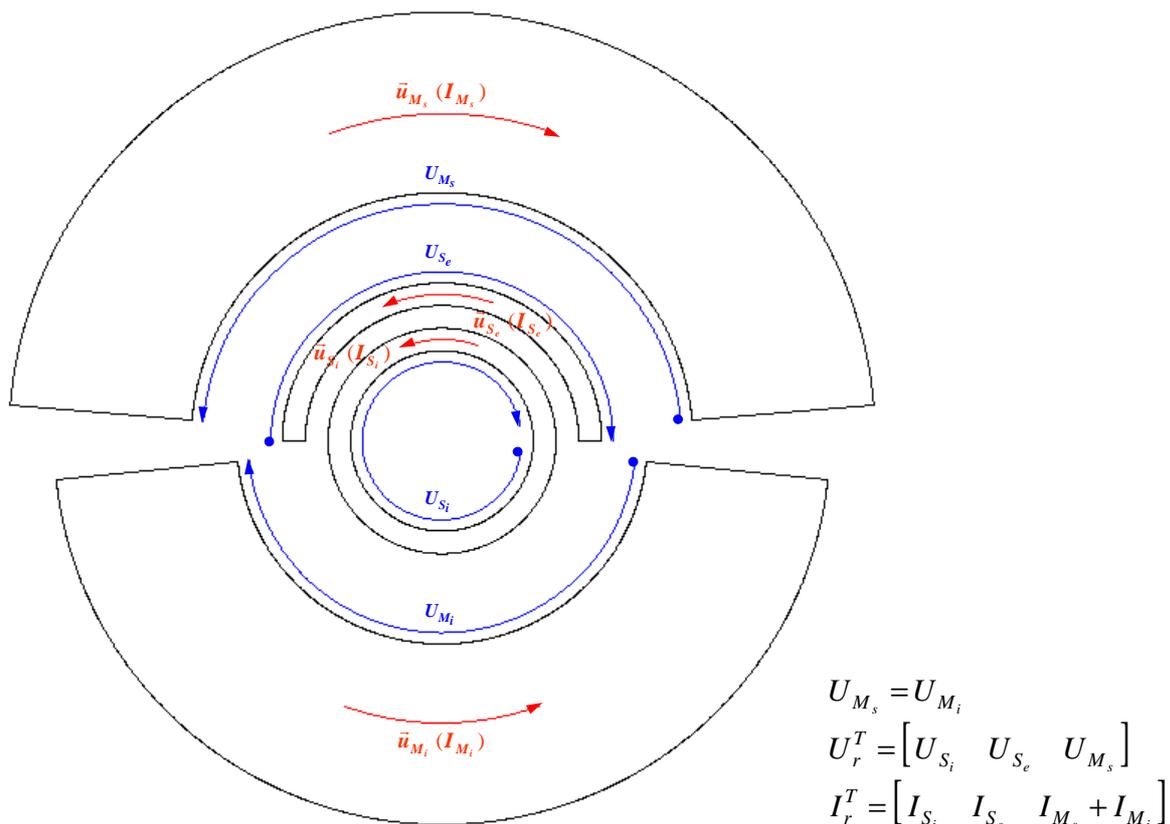


Figure 19 : Définition des vecteurs réduits U_r et I_r , cas de l'inductance L .

Nous devons identifier la relation (3.83) liant I_r et U_r , c'est-à-dire renseigner la matrice d'interaction $[Y_r]$, de dimension n_e+1 . Cette opération nécessite quelques manipulations matricielles qui, bien que relativement simples, sont difficiles à clairement décrire par le verbe seul. Nous ferons donc par la suite référence au Tableau 9, qui expose les grandes étapes du processus de calcul de $Z_{sm}(f)$ et donne, pour l'inductance L , la structure des matrices intermédiaires.

$$I_r = [Y_r] \cdot U_r \quad (3.83)$$

La matrice impédance $[Z_L]$ des anneaux circulaires une fois obtenue (étape 1), celle-ci est inversée pour donner la matrice admittance $[Y_L]$ (étape 2). On démontre que l'élément de $[Y_r]$ couplant le conducteur A au conducteur B , $(A, B) \in \{S_i, S_e, M_s, M_i\}^2$, est égal à la somme des éléments des sous-matrices de $[Y_L]$ couplant les anneaux de A aux anneaux de B . Par exemple, l'admittance $Y_{S_e-M_s M_i}^r$ entre la spire externe et le plan de masse est égale à la somme de toutes les admittances élémentaires liant ces deux conducteurs :

$$Y_{S_e-M_s M_i}^r = (Y_r)_{n_e, n_e+1} = \sum_{k=(n_e-1)N_1+1}^{n_e N_1} \sum_{l=n_e N_1+1}^{n_e N_1+2N_2} (Y_L)_{k,l} \quad (3.84)$$

Cette étape, numérotée 3 dans le tableau synoptique, est parfois appelée étape de réduction car elle conduit, à partir d'une matrice de dimension $n_e N_1 + 2N_2$, à une matrice de dimension $n_e + 1$, beaucoup plus petite.

Etape	Description	Exemple de l'inductance L				
	Résultat					
1	Construction de la matrice impédance	×	N_1	N_1	N_2	N_2
		N_1	$[Z_{S_i-S_i}]$	$[Z_{S_i-S_e}]$	$[Z_{S_i-M_s}]$	$[Z_{S_i-M_i}]$
	Matrice impédance $[Z_L]$	N_1	$[Z_{S_e-S_i}]$	$[Z_{S_e-S_e}]$	$[Z_{S_e-M_s}]$	$[Z_{S_e-M_i}]$
		N_2	$[Z_{M_s-S_i}]$	$[Z_{M_s-S_e}]$	$[Z_{M_s-M_s}]$	$[Z_{M_s-M_i}]$
		N_2	$[Z_{M_i-S_i}]$	$[Z_{M_i-S_e}]$	$[Z_{M_i-M_s}]$	$[Z_{M_i-M_i}]$
2	Inversion de la matrice $[Z_L]$	×	N_1	N_1	N_2	N_2
		N_1	$[Y_{S_i-S_i}]$	$[Y_{S_i-S_e}]$	$[Y_{S_i-M_s}]$	$[Y_{S_i-M_i}]$
	Matrice admittance $[Y_L]$	N_1	$[Y_{S_e-S_i}]$	$[Y_{S_e-S_e}]$	$[Y_{S_e-M_s}]$	$[Y_{S_e-M_i}]$
		N_2	$[Y_{M_s-S_i}]$	$[Y_{M_s-S_e}]$	$[Y_{M_s-M_s}]$	$[Y_{M_s-M_i}]$
		N_2	$[Y_{M_i-S_i}]$	$[Y_{M_i-S_e}]$	$[Y_{M_i-M_s}]$	$[Y_{M_i-M_i}]$
3	Réduction de la matrice $[Y_L]$	×	1	1	1	
	Matrice impédance réduite $[Y_r]$	1	$Y_{S_i-S_i}^r$	$Y_{S_i-S_e}^r$	$Y_{S_i-M_s}^r$	$Y_{S_i-M_i}^r$
		1	$Y_{S_e-S_i}^r$	$Y_{S_e-S_e}^r$	$Y_{S_e-M_s}^r$	$Y_{S_e-M_i}^r$
		1	$Y_{M_s M_i-S_i}^r$	$Y_{M_s M_i-S_e}^r$	$Y_{M_s M_i-M_s}^r$	$Y_{M_s M_i-M_i}^r$
4	Inversion de la matrice $[Y_r]$	×	1	1	1	
		1	$Z_{S_i-S_i}^r$	$Z_{S_i-S_e}^r$	$Z_{S_i-M_s}^r$	$Z_{S_i-M_i}^r$
	Matrice impédance réduite $[Z_r]$	1	$Z_{S_e-S_i}^r$	$Z_{S_e-S_e}^r$	$Z_{S_e-M_s}^r$	$Z_{S_e-M_i}^r$
		1	$Z_{M_s M_i-S_i}^r$	$Z_{M_s M_i-S_e}^r$	$Z_{M_s M_i-M_s}^r$	$Z_{M_s M_i-M_i}^r$
5	Réduction de la matrice $[Z_r]$	$Z_{sm}(f) = R_{sm}(f) + 2j\pi \cdot L_{sm}(f) \cdot f$				
	Impédance $Z_{sm}(f)$					

Tableau 9: Synopsis du processus de calcul de l'impédance équivalente $Z_{sm}(f)$.

Rappelons que l'analyse est, pour l'instant, limitée aux seuls conducteurs curvilignes. La tension U_{sm} appliquée à l'un des ports de cette inductance "restreinte" est liée au courant I_{tot} injecté par la relation de proportionnalité suivante :

$$U_{sm} = Z_{sm}(f) \cdot I_{tot} \quad (3.85)$$

Le coefficient de proportionnalité, en d'autres termes l'impédance des conducteurs curvilignes $Z_{sm}(f)$, est déterminé en appliquant les règles élémentaires de la théorie des réseaux électriques. Ainsi, d'après le premier lemme de Kirchhoff, la tension U_{sm} est égale à la somme des tensions aux bornes de chaque spire et du plan de masse :

$$U_{sm} = \sum_{i=1}^{n_e+1} (U_r)_k \quad (3.86)$$

Les courants circulant dans chaque spire sont nécessairement égaux, de par le second lemme de Kirchhoff relatif à la conservation du courant total I_{tot} . Le plan de masse assurant une fonction de retour de courant, il est également parcouru par un courant I_{tot} .

$$I_{tot} = (I_r)_1 = \dots = (I_r)_{n_e} = (I_r)_{n_e+1} \quad (3.87)$$

La matrice admittance réduite $[Y_r]$ est inversée lors de l'étape 4. Son inverse, $[Z_r]$, est assez logiquement nommé matrice impédance réduite. Il peut alors être prouvé, à l'aide des relations (3.86) et (3.87), que $Z_{sm}(f)$ est égale à la somme des éléments de $[Z_r]$ (étape 5).

$$Z_{sm}(f) = \sum_{k=1}^{n_e+1} \sum_{l=1}^{n_e+1} (Z_r)_{k,l} \quad (3.88)$$

La procédure de réduction et d'assemblage a été appliquée aux conducteurs $\{S_i, S_e, M_s M_i\}$ afin de détailler la manière dont le plan de masse est intégré. Elle n'en reste pas moins valable pour une structure multiconductrice quelconque. Ainsi, l'impédance $Z_l(f)$ des lignes assurant l'alimentation de la spirale peut être calculée suivant le même principe. Notons que son évaluation est indépendante de celle de $Z_{sm}(f)$ du fait que le couplage mutuel entre les lignes et la spirale a été négligé. L'impédance équivalente $Z(f)$ de l'inductance n'est alors finalement que l'association en série de ces deux impédances.

$$Z(f) = \frac{U_{tot}}{I_{tot}} \quad Z(f) = Z_{sm}(f) + Z_l(f) \quad (3.89)$$

3.4.3. Inversion de la matrice impédance

L'obtention de la réponse fréquentielle d'une inductance nécessite l'inversion de la matrice impédance $[Z_L]$ qui lui est associée et ce, pour plusieurs fréquences. Nous devons nous assurer que ce problème peut être résolu avec précision et considérons pour cela l'inductance de test \mathbf{L} . En

adoptant un maillage constant M_b tel que $t = 0,5 \mu\text{m}$, $\beta = 2$ et $W_{2D} = W$, nous obtenons une discrétisation de la structure avec $N_1 = 300$ filaments par spire et $N_2 = 358$ filaments dans les plans de masse supérieur et inférieur. La matrice $[Z_L]$ résultante, de dimension $N = n_e N_1 + 2N_2 = 1316$, est déjà de belle taille.

Le conditionnement ρ d'une matrice $[X]$ est un nombre réel mesurant la sensibilité de X vis-à-vis de l'inversion réalisée par un ordinateur. Cette notion complexe sera abordée en détail au chapitre 4, et retenons pour l'instant qu'une matrice dont le conditionnement est supérieur à 10^{16} n'est pas numériquement inversible. La Figure 20 représente, dans le cas de l'inductance L , le module des éléments de $[Z_L]$ normés par rapport à l'élément dont le module est le plus faible. Elle fait clairement apparaître l'étendue, sur deux ordres de grandeurs, de l'intervalle contenant les éléments de la matrice impédance, ce qui est, *a priori*, de mauvais augure pour la suite. Aussi étonnant que cela puisse paraître, le conditionnement de la matrice impédance est faible : il n'excède pas 10^4 sur la plage de fréquences $[0, 6]$ GHz. A titre de comparaison, le conditionnement d'un carré magique [82] d'ordre huit (matrice 8×8) est supérieur à 10^{17} . La matrice $[Z_L]$ est numériquement saine et son inversion ne pose en conséquence aucune difficulté. Bien que cela ne soit pas critique, remarquons néanmoins que l'introduction d'un plan de masse n'est pas sans incidence sur la qualité numérique du problème. Ainsi, l'adjonction d'un plan de masse autour de l'inductance L multiplie le conditionnement de la matrice $[Z_L]$ par 30 environ.

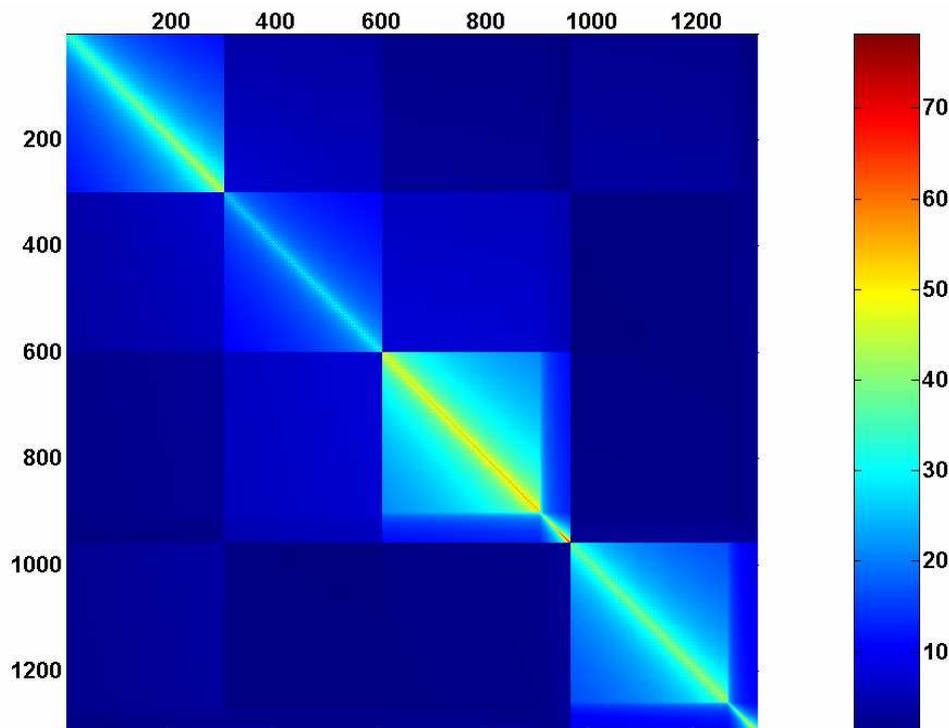


Figure 20: Importance relative des éléments de la matrice $[Z_L]$.

Nous pouvons employer la méthode LU [83] conventionnelle pour inverser la matrice. L'inversion de la matrice $[Z_L]$ adjointe à l'inductance \mathbf{L} , réalisée ici sur un ordinateur personnel cadencé à 1,7 GHz et équipé de 700 Mo de mémoire vive, nécessite 1,5 minute par point de fréquence. Ce temps, loin d'être négligeable, n'est pas prohibitif. Notons cependant que l'omission des effets capacitifs nous cantonne aux inductances dont le nombre de tours n'excède pas 4,5. Leur prise en compte permettra de traiter des structures beaucoup plus importantes conduisant à des matrices impédances de très grande dimension. L'inversion matricielle peut alors devenir problématique, ce que soulignent d'ailleurs certains auteurs. M. Kamon *et al.* [50] mentionnent que l'inversion directe d'une matrice n'est plus numériquement viable dès lors que la dimension de celle-ci excède quelques milliers. On doit alors avoir recours à des algorithmes d'inversion itératifs raffinés, tel que l'algorithme GMRes ("Generalized Minimum Residual method") [84]. Ces algorithmes sont intéressants car ils acceptent en entrée une matrice candidate qui, au fil des itérations, tend vers l'inverse $[Y_L]$ tant recherché. Ainsi, la convergence se trouve être considérablement accélérée dès lors que l'inverse est déterminé pour le premier point de fréquence, ce dernier pouvant alors être utilisé comme matrice initiale à la fréquence suivante. Cette approche n'est évidemment efficace que si la matrice $[Z_L]$ n'évolue pas de manière trop brusque, ce qui implicitement suppose des points de fréquence suffisamment rapprochés.

Lorsque cette condition n'est pas remplie, il est néanmoins possible d'améliorer la vitesse de convergence en reformulant le problème à l'aide d'une matrice dite de pré-conditionnement [50]. Cette matrice, qui n'est rien d'autre qu'une approximation de l'inverse $[Y_L]$, est déterminée d'après une analyse structurelle de $[Z_L]$. La Figure 20 fait en effet apparaître, au sein de la matrice impédance, des blocs qui reflètent l'intensité des couplages entre les différents conducteurs macroscopiques S_i , S_e , M_s et M_i . Celle-ci peut varier de plusieurs ordres de grandeur d'un bloc à l'autre, les différents conducteurs étant clairement distincts. On parle pour cette raison de problème physiquement localisé. La matrice de pré-conditionnement peut être obtenue en négligeant lors de l'inversion les blocs correspondant aux couplages les plus faibles. Nous présumons ici implicitement qu'il est possible de construire l'inverse d'une matrice d'après les sous-matrices qui la constituent et c'est dans ce but précis que nous avons implémenté un algorithme un peu particulier, que l'on doit à V. Strassen [85]. Scindons arbitrairement la matrice impédance en quatre blocs comme suit :

$$[Z_L] = \begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] \\ [Z_{21}] & [Z_{22}] \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

La procédure mise au point par Strassen, dont les étapes sont précisées dans le Tableau 10, est récursive au sens où elle permet l'inversion de $[Z_L]$ dans l'hypothèse où l'inverse de $[Z_{11}]$ est

connu. Elle a été légèrement modifiée par rapport à la version originale afin de traiter plus efficacement – et exclusivement – le cas des matrices symétriques, ce que vérifie la matrice $[Z_L]$ comme somme de matrices elles mêmes symétriques (cf. paragraphe 3.2.2). On démontre en effet, à l'aide de l'algorithme de Strassen d'ailleurs, que l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique. Les matrices $[X_1]$, $[Y_{22}]$ et $[Y_{11}]$ sont ainsi symétrisées à l'aide de la fonction (3.91) lors des étapes 1, 3 et 6 respectivement. L'inversion d'une matrice de grande dimension n'étant pas exempte d'erreurs d'arrondis, cette opération permet au moins une correction qualitative de leurs effets.

$$\text{sym}(X) = \frac{X + X^T}{2} \quad (3.91)$$

Etape	Opération	Etape	Opération
1	$[X_1] = \text{sym}([Z_{11}]^{-1})$	4	$[Y_{12}] = -[X_2] \times [Y_{22}]$
2	$[X_2] = [X_1] \times [Z_{12}]$	5	$[Y_{21}] = [Y_{12}]^T$
3	$[Y_{22}] = \text{sym}([Z_{22}] - [Z_{12}]^T \times [X_2])^{-1}$	6	$[Y_{11}] = \text{sym}([X_1] - [X_2] \times [Y_{21}])$

Tableau 10 : Etapes de l'algorithme de Strassen adapté aux matrices symétriques.

La construction d'une matrice de pré-conditionnement est dès lors aisée. La procédure ci-dessus est appliquée récursivement à la matrice impédance, subdivisée en $\lfloor N_t \rfloor + 3$ blocs correspondant aux conducteurs macroscopiques. A chaque itération, une seule matrice nécessite une inversion directe (à l'étape 3), réalisée par l'algorithme LU (noté A_{LU}). Les blocs que l'on désire négliger sont remplacés dans les calculs par une matrice nulle de mêmes dimensions. Le pseudo-inverse peut être construit très rapidement, ce qui est primordial, car le résultat d'un produit impliquant une matrice nulle est immédiat.

Si l'algorithme de Strassen opérant par bloc (A_{SB}) fut initialement codé en prévision de l'emploi d'algorithmes d'inversion itératifs, il a fait preuve de qualités justifiant largement son utilisation directe pour inverser $[Z_L]$. Le conditionnement maximum observé lors des étapes d'inversion (1 et 3) est en effet inférieur d'environ 10 % au conditionnement de $[Z_L]$. De plus, bien qu'ayant recours à A_{LU} , l'algorithme A_{SB} se révèle lui être numériquement supérieur, comme nous allons le montrer à présent. Supposons que A_{LU} réalise l'inversion d'une matrice de dimension N en un temps t_{LU} et requiert n_{LU} opérations arithmétiques élémentaires (additions, soustractions, multiplications et divisions). A_{SB} inverse, quant à lui, la même matrice en un temps t_{SB} après n_{SB}

opérations arithmétiques. L'efficacité arithmétique et l'efficacité temporelle de A_{SB} par rapport à A_{LU} sont alors respectivement définies par :

$$e_{SB}^a(N) = \frac{n_{LU}}{n_{SB}} \qquad e_{SB}^t(N) = \frac{t_{LU}}{t_{SB}} \qquad (3.92)$$

L'algorithme A_{SB} sera plus avantageux relativement à l'une de ces définitions si le rapport associé est supérieur à 1. La Figure 21 reproduit les grandeurs e_{SB}^a et e_{SB}^t en fonction de N . On constate que $e_{SB}^a \approx 0,75$ pour tout N , ce qui signifie que l'algorithme A_{SB} nécessite, pour inverser une matrice, 33 % de calculs de plus que A_{LU} . La tendance s'inverse cependant lorsque l'on considère l'efficacité temporelle puisque $e_{SB}^t > 1$ dès que $N > 500$ et croît lorsque N augmente. A_{SB} permet ainsi un gain en temps d'environ 15 %. Le fait que les deux critères d'analyse ne conduisent pas à la même conclusion est quelque peu étonnant. Nous devons en déduire que la complexité d'un algorithme ne peut, en pratique, être pleinement appréciée par la seule évaluation du nombre d'opérations arithmétiques engendrées par celui-ci. De nombreux facteurs, comme l'encombrement mémoire par exemple, doivent être pris en compte.

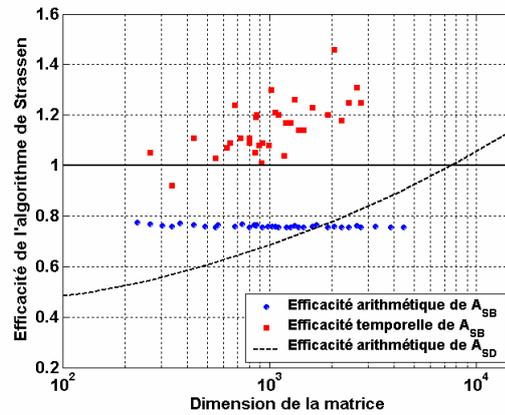


Figure 21 : Efficacité de l'algorithme de Strassen.

Si l'algorithme d'inversion originellement proposé par V. Strassen (noté A_{SD}) est également basé sur une application récursive de la procédure détaillée dans le Tableau 10, il se distingue de son homologue A_{SB} par la subdivision adoptée pour les matrices à inverser. Soit une matrice $[Z_L]$ de dimension $N = m \times 2^k$, m et k entiers, que l'on désire inverser. A la première itération de A_{SD} , $[Z_L]$ est scindée en quatre matrices de dimension $m \times 2^{k-1}$. A la $i^{\text{ième}}$ itération, $i \in [2, k]$, les matrices à inverser, à savoir $[M_1] = [Z_{11}]$ et $[M_2] = [Z_{22}] - [Z_{12}]^T \times [X_2]$, sont divisées en quatre matrices de dimension $m \times 2^{k-i}$. A_{SD} opère donc en quelque sorte par dichotomie. Après k itérations, le cas limite est atteint et les matrices $[M_1]$ et $[M_2]$, de dimension m , sont traitées à l'aide de l'algorithme A_{LU} . L'algorithme A_{SD} est très intéressant car le nombre n_{SD} d'opérations arithmétiques nécessaires à

l'inversion de $[Z_L]$ est proportionnel à $N^{2,81}$ alors que $n_{LU} \propto N^3$. L'efficacité numérique de A_{SD} relativement à A_{LU} , représentée Figure 21, est en conséquence une fonction croissante de N . On remarque immédiatement que e_{SD}^a est supérieure à e_{SB}^a pour $N > 2000$ et dépasse l'unité lorsque $N > 7500$. Ces valeurs seuils sont toutefois suffisamment élevées pour ne pas justifier, en l'état actuel, l'implémentation de A_{SD} . En conclusion, nous retiendrons par la suite l'algorithme A_{SB} pour inverser la matrice impédance.

La Figure 22 représente, en fonction de N , les temps t_c et t_i nécessaires à notre ordinateur personnel pour respectivement construire et inverser $[Z_L]$. S'il est vrai que ces variables sont directement liées aux caractéristiques de la machine (1,7 GHz de fréquence d'horloge et 700 Mo de mémoire vive), les abaques ci-dessous ont au moins le mérite, en précisant les ordres de grandeurs, de donner quelques repères à l'utilisateur potentiel. Par exemple, le maillage constant de l'inductance \mathbf{L} , défini au début de cette partie, implique $N = 1316$ mailles. On en déduit immédiatement que le temps de calcul de $R(f)$ et de $L(f)$, évaluées en $n = 31$ points de fréquence, est d'environ 23 minutes. Ces graphiques font également apparaître la nature des lois reliant les temps t_c et t_i à la dimension N . Ceux-ci vérifient approximativement $t_c \propto N^{1,91}$ et $t_i \propto N^{2,71}$, ce qui signifie qu'il existe une dimension limite N_l au delà de laquelle le temps d'inversion prédomine sur le temps de construction. Ainsi, lorsque $n = 31$, N_l vaut 2200 environ. Enfin, notons que la relation liant le temps de construction t_c à la dimension N de la matrice impédance est très dispersée, ce que l'on peut expliquer en remarquant que la variable t_c dépend également fortement du maillage retenu. La convergence de l'algorithme de Landen [71] est, en effet, d'autant plus lente que plus le maillage est fin. L'évaluation de l'intégrale elliptique incomplète F est alors plus délicate car la singularité de cette fonction est approchée ($k \rightarrow 1$).

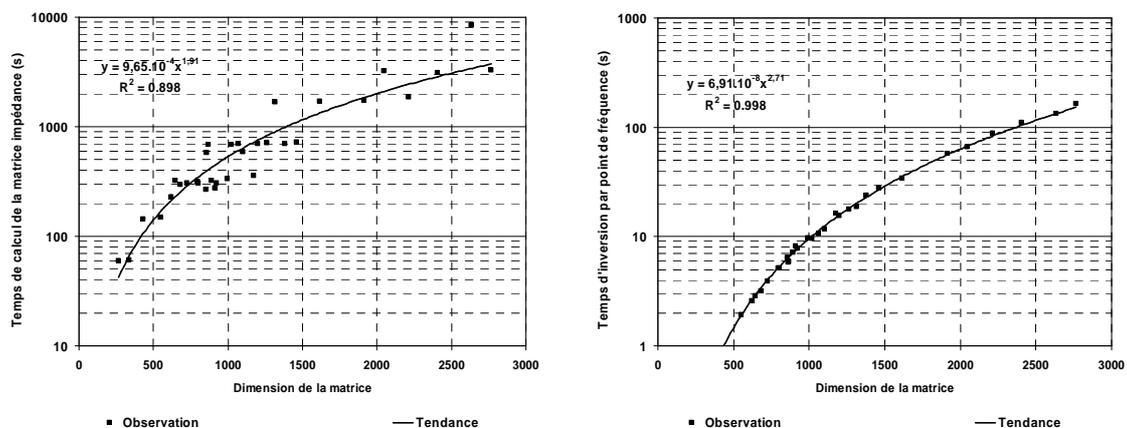


Figure 22 : Temps de construction t_c et d'inversion t_i de la matrice $[Z_L]$ en fonction de sa dimension.

4. Validation du simulateur

4.1. Lignes de transmission

Il ressort de la partie 3.2 qu'un simulateur basé sur la méthode PEEC peut être codé pour une grande part indépendamment de la décomposition choisie. Nous avons donc développé conjointement au programme principal une variante spécifiquement dédiée à la simulation de structures rectilignes [86]. Ce module de test a été confronté au logiciel commercial InCa [52]. Les résultats sur la résistance $R(f)$ et l'inductance équivalente $L(f)$ ne diffèrent pas de plus de 0,16 % et 0,04 % respectivement. Ces légères dissemblances peuvent d'ailleurs s'expliquer par des considérations informatiques. InCa est en effet implémenté en Fortran [87], langage de programmation qui ne manipule pas explicitement les nombres complexes contrairement au langage scientifique Matlab [88], auquel nous avons eu recours. L'inversion de la matrice $[Z_L]$ est en conséquence autrement complexe, et s'accompagne inévitablement d'imprécisions plus importantes. Cette limitation structurelle du Fortran n'est d'ailleurs pas sans incidence sur l'efficacité d'InCa puisque les temps de simulation constatés sont, à maillage identique, en moyenne 4 fois plus longs.

Nous allons tenter de vérifier, sur un exemple simple, que la modélisation du plan de masse est correcte, et en particulier de confirmer l'hypothèse relative au retour du courant. Cette validation est indirecte : elle est réalisée sur une ligne et non pas sur une inductance, cela pour deux raisons. D'une part, le plan de masse est pris en compte de la même manière pour ces deux composants (les conclusions relatives aux lignes pourront donc être extrapolées aux inductances). D'autre part, la méthode PEEC conventionnelle, utilisée pour modéliser les lignes, est exempte d'approximation. Un défaut de représentation du plan de masse sera donc identifié sans ambiguïté. Nous simulons dans ce but la ligne de transmission définie par les paramètres $W = 50 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $l = 2 \text{ mm}$, $S_g = 10 \mu\text{m}$, et $W_g = 400 \mu\text{m}$. L'espacement au plan de masse est faible afin que l'effet de ce dernier soit sensible. Le maillage M_b utilisé est tel que $W_{2D} = W$, $w = t = 0,5 \mu\text{m}$ dans la région 2D et $w = 3 \mu\text{m}$ dans la région 1D.

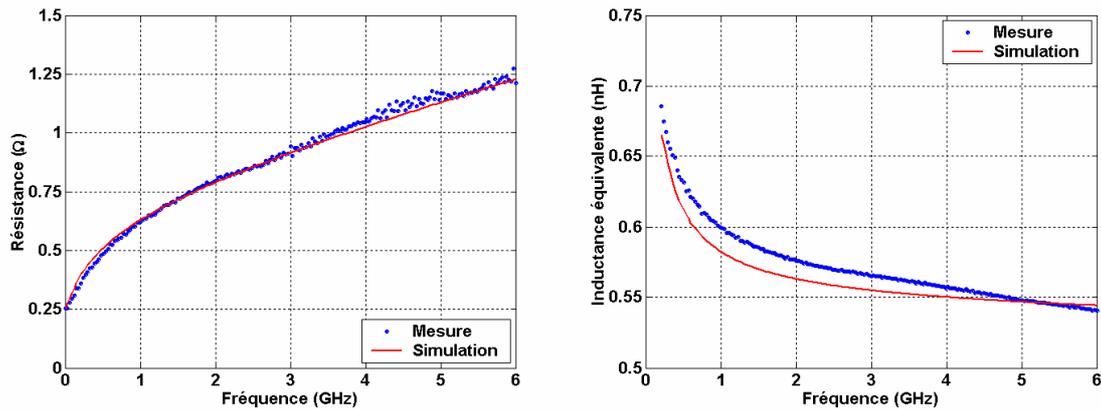


Figure 23 : Résistance et inductance équivalente de la ligne de transmission.

La Figure 23 représente, en fonction de la fréquence f , la résistance $R(f)$ et l'inductance équivalente $L(f)$ de la ligne. Les résultats mesurés et simulés sont véritablement très proches, ce dont témoignent les erreurs relatives moyennes ($e_R^{moy} = 2,05 \%$, $e_L^{moy} = 1,64 \%$) et maximales ($e_R^{max} = 12,1 \%$, $e_L^{max} = 3,64 \%$). Un tel accord, s'il ne constitue évidemment pas une preuve irréfutable, n'en est pas moins un argument de choix en faveur de notre représentation du plan de masse.

4.2. Qualité de l'approximation de Simpson

La Figure 24 ci-dessous représente la valeur absolue de l'erreur relative (E_r), en fonction du module k , introduite par l'approximation de Simpson lors de l'évaluation du couplage magnétique entre des filaments appartenant aux conducteurs de type $\{S_e, M_s, M_i\}$. La référence a été obtenue en calculant numériquement l'intégrale (3.40) d'après la méthode des trapèzes [73], telle que l'intervalle d'intégration soit subdivisé en 20 parties égales. Les interactions impliquant une spire interne (S_i) n'apparaissent pas dans ce qui suit car les expressions produites dans le Tableau 2 sont rigoureusement exactes.

Nous avons retenu pour le plan de masse une ouverture angulaire $\lambda = 5^\circ$ et pour la spire externe $\varphi = 180^\circ$, ce qui correspond typiquement aux inductances dont nous disposons. Deux fibres sont d'autant plus proches que le module k est proche de 1. A titre d'exemple, si l'on considère des fibres coplanaires, $k = 0,8$ signifie que les rayons de ces fibres sont dans un rapport quatre. Dans la quasi totalité des cas que nous aurons à traiter $k \in [0,8, 1]$. Remarquons que plus le module k est faible et plus les spires sont éloignées et par voie de conséquence, moins leur couplage magnétique mutuel est important. Ainsi un défaut de modélisation aura d'autant plus de poids que le module k sera proche de l'unité.

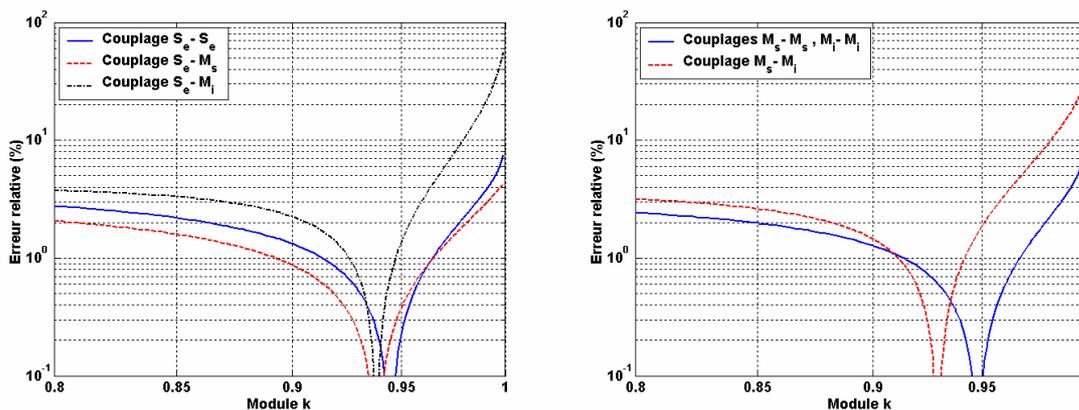


Figure 24 : Erreur introduite par l'approximation de Simpson pour les différents types de couplage.

Si les résultats sont tout à fait acceptables dans les cas des couplages $S_e - S_e$, $S_e - M_s$, $M_s - M_s$ et $M_i - M_i$, puisque les erreurs observées sont de l'ordre de $\pm 5 \%$, il n'en est pas du tout de même dans le cas des couplages $S_e - M_i$ et $M_s - M_i$ avec des erreurs relatives pouvant respectivement excéder 50 % et 20 %. A la singularité, que fait artificiellement apparaître la représentation logarithmique, correspond un changement de signe de E_r . Ainsi, au-delà d'une certaine valeur du module k , dépendante du couplage et comprise dans l'intervalle $[0,92, 0,95]$, l'approximation de Simpson sous-estime systématiquement la valeur vraie. Il s'agit ici d'un défaut de modélisation bien inquiétant, et il convient de s'assurer que son influence sur le résultat final reste faible. Pour cela nous comparons, Figure 25, les résultats de la simulation de l'ensemble d'inductances Λ , défini au paragraphe 3.4.1, obtenus en ayant recours d'une part à l'approximation de Simpson (A_S) et d'autre part à l'intégration numérique (I_n).

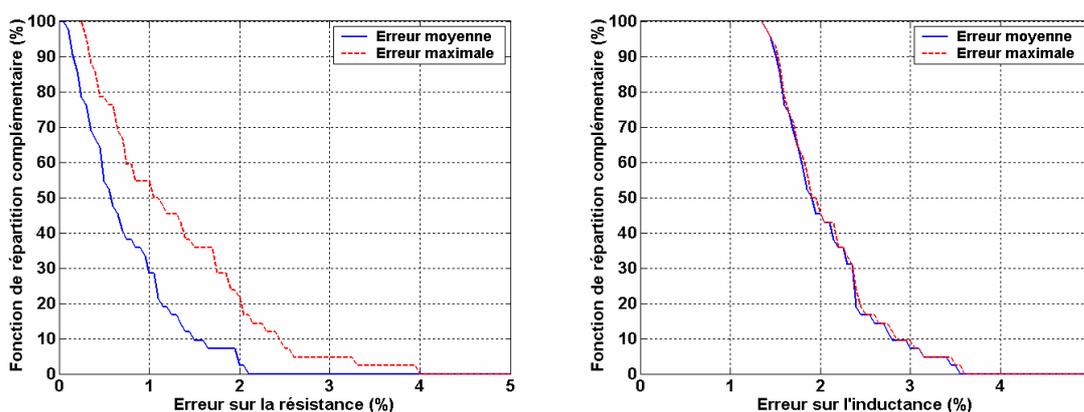
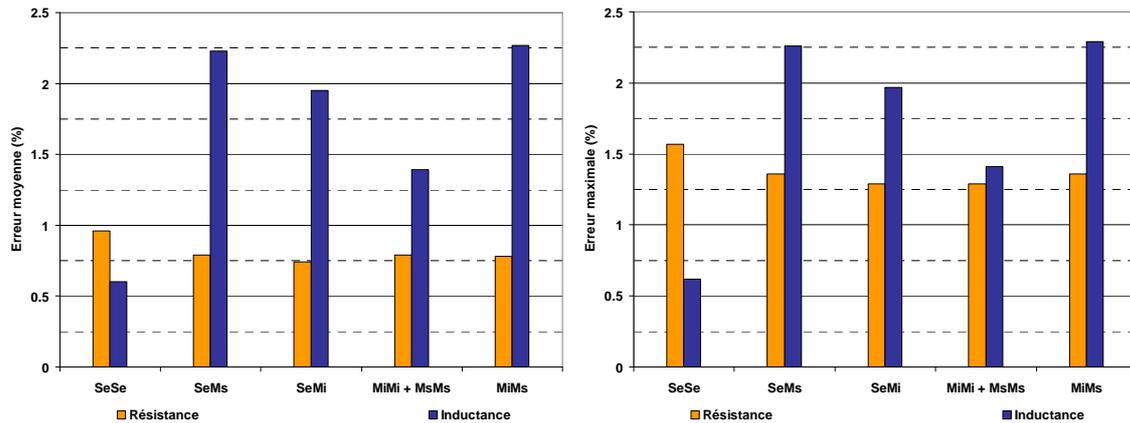


Figure 25 : Analyse statistique de l'erreur relative introduite par l'approximation de Simpson.

Aussi étonnant que cela puisse paraître, l'effet de A_S sur l'impédance équivalente $Z(f)$ est beaucoup moins important que ce que l'analyse individuelle des couplages laissait présager : $E_R^{moy} = 0,73 \%$, $E_R^{max} = 1,29 \%$, $E_L^{moy} = 2,06 \%$, $E_L^{max} = 2,09 \%$. Si l'on considère la résistance $R(f)$, 90 % des inductances de l'ensemble Λ présentent un écart moyen par rapport au calcul numérique

inférieur à 1,5 %. L'effet sur $L(f)$ est un peu plus marqué avec un écart de 3 %, à fraction de population égale. Comment expliquer que les erreurs importantes précédemment relevées au niveau microscopique ne se répercutent pas avec plus de vigueur à l'échelle macroscopique ? En remarquant tout simplement que les différents couplages ne participent pas pour la même part à la réponse finale. Ainsi, la Figure 20 fait clairement apparaître que les couplages de type $S_e - M_i$ et $M_s - M_i$, pour lesquels l'approximation réalisée est (n'ayons pas peur du mot) mauvaise, sont aussi les plus faibles. Nous atteignons ici les limites d'une étude par segmentation, qui vise à décrire le tout par l'analyse de ses parties. Certaines caractéristiques se transmettent néanmoins lors du changement d'échelle. Ainsi, l'inductance équivalente $L(f)$ est systématiquement sous-estimée.

L'erreur sur $L(f)$ n'est pas négligeable devant l'incertitude expérimentale, A_S est donc en toute rigueur insuffisante. La solution entièrement numérique, quant à elle, n'est pas pleinement satisfaisante d'un point de vue conceptuel. Elle revient en effet à reporter au niveau du calcul de l'interaction magnétique la discrétisation azimutale des conducteurs, inhérente à la description par barreaux rectilignes et dont nous nous sommes affranchis au paragraphe 3.3.2.1. On perd alors tout l'intérêt d'une représentation par anneaux circulaires. De nouveau, force est de constater que la complexité globale d'un problème semble demeurer constante. Seule sa répartition entre les différentes étapes nécessaires à la résolution paraît changer suivant la méthode retenue. Notre démarche est-elle vaine pour autant ? Non, bien entendu. L'approximation de Simpson, bien que grossière, donne des résultats d'ores et déjà proches de I_n , ce qui révèle une vitesse de convergence élevée et démontre l'efficacité numérique de notre approche. Si les contraintes l'exigent, on pourra retenir à profit une approximation un peu plus élaborée ou encore adopter une démarche mixte alliant A_S et I_n . La Figure 26 consigne l'erreur moyenne (E_R^{moy} , E_L^{moy}) et l'erreur maximale (E_R^{max} , E_L^{max}) ainsi induites par rapport à I_n lorsque les couplages reportés en abscisse sont calculés numériquement, les autres étant évalués d'après A_S . Il est clair, à la lueur de ces résultats, que les efforts de modélisation devront en priorité porter sur les couplages de type $S_e - S_e$.


 Figure 26 : Erreurs relatives introduites par l'utilisation conjointe de A_s et I_n .

4.3. Confrontation à l'expérience

4.3.1. Etude statistique

La comparaison entre données expérimentales et simulées concerne l'ensemble Λ , comprenant 40 inductances aux caractéristiques géométriques variées (cf. Tableau 7). Deux plages de fréquences sont retenues pour la confrontation à la mesure : $\Delta f_1 = [0, 3]$ GHz et $\Delta f_2 = [0, 6]$ GHz. Il a été montré au paragraphe 3.1.3.2 que la méthode PEEC n'intègre pas, entre autres, les effets de capacité, qui interviennent à plus haute fréquence que les effets magnétiques. En se limitant à l'intervalle Δf_1 , nous évaluons la méthode PEEC sur un domaine fréquentiel où les phénomènes qu'elle est censée représenter sont prépondérants. Les comparaisons réalisées sur l'intervalle Δf_2 donnent, quant à elles, une idée du travail qu'il reste à réaliser...

Les résultats relatifs à la résistance $R(f)$, représentés Figure 27, sont très encourageants. Si seulement 30 % des inductances présentent une erreur moyenne inférieure à 10 % sur la plage de fréquences Δf_2 , ce pourcentage atteint 92 % sur Δf_1 . On vérifie d'ailleurs que les données statistiques générales associées sont bonnes : $E_R^{moy} = 5,40$ %, $E_R^{max} = 18,19$ %. Elles sont ici obtenues en "moyennant", pour l'ensemble Λ , les erreurs relatives moyennes et maximales calculées sur Δf_1 . Remarquons que E_R^{moy} reste légèrement supérieure à l'incertitude expérimentale estimée à 4 % environ au chapitre 1. Ainsi, s'il est clair que nous approchons les limites de notre banc de caractérisation, celui-ci reste en toute rigueur suffisamment précis et nous pouvons conclure que les écarts constatés sont effectivement dus à un défaut de modélisation. Les résultats plus discutables observés lorsque l'on considère Δf_2 , peuvent être partiellement imputés aux incertitudes de mesure. En effet, l'incertitude associée à $R(f)$, produite au chapitre 1, est une

grandeur moyenne sur Δf_2 . Une étude plus poussée aurait sans aucun doute montré que celle-ci doit croître avec la fréquence. La résistance devient rapidement très faible devant la réactance lorsque la fréquence augmente, elle est par conséquent plus délicate à déterminer avec précision. Ainsi, l'erreur maximale sur l'intervalle Δf_2 n'est pas, à notre avis, un paramètre d'analyse pertinent. Elle est précisée à titre indicatif mais ne sera pas commentée.

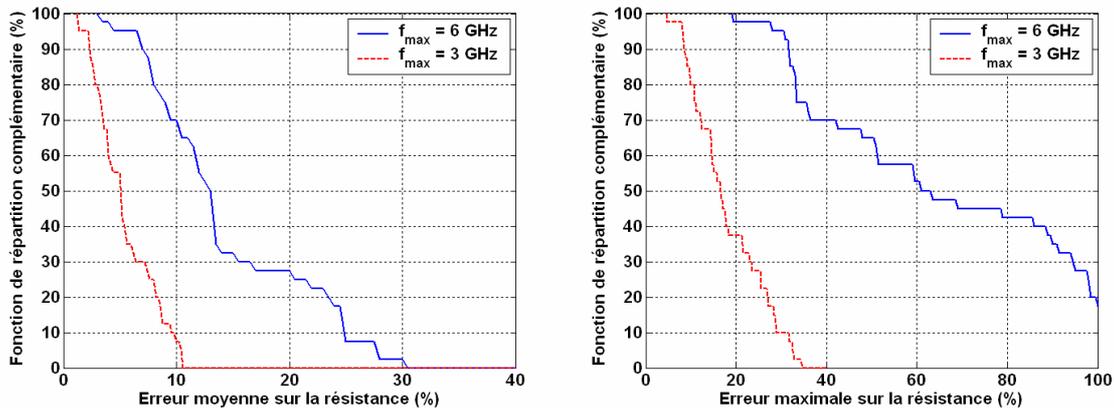


Figure 27 : Analyse statistique de l'erreur relative sur $R(f)$, comparaison à la mesure.

Les résultats sur l'inductance équivalente $L(f)$, Figure 28, sont également prometteurs. Ainsi, 67 % des inductances présentent une erreur moyenne sur Δf_2 inférieure à 5 % pour dépasser 90 % sur la fenêtre fréquentielle Δf_1 . Les erreurs globales ($E_L^{moy} = 2,33$ %, $E_L^{max} = 3,60$ %) restent cependant largement supérieures à l'incertitude expérimentale estimée à 0,3 %. Analyser l'erreur en fonction de la géométrie des composants simulés n'est pas un exercice aisé, le nombre d'éléments de l'ensemble Λ étant relativement faible pour ce type d'étude. Ainsi n'avons-nous pu tirer de conclusion susceptible de mettre catégoriquement en cause telle ou telle phase de la procédure de modélisation. Tout au plus pouvons-nous affirmer que l'erreur E_L^{moy} peut être corrélée, au premier ordre, au nombre de tours et à la distance au plan de masse. La valeur de l'inductance semble ainsi être systématiquement sous-estimée lorsque le plan de masse est proche. Le recours à l'intégration numérique n'améliore pas les résultats : $E_L^{moy} = 2,83$ % et $E_L^{max} = 3,85$ %, ce qui signifie que certaines des erreurs introduites doivent se compenser.

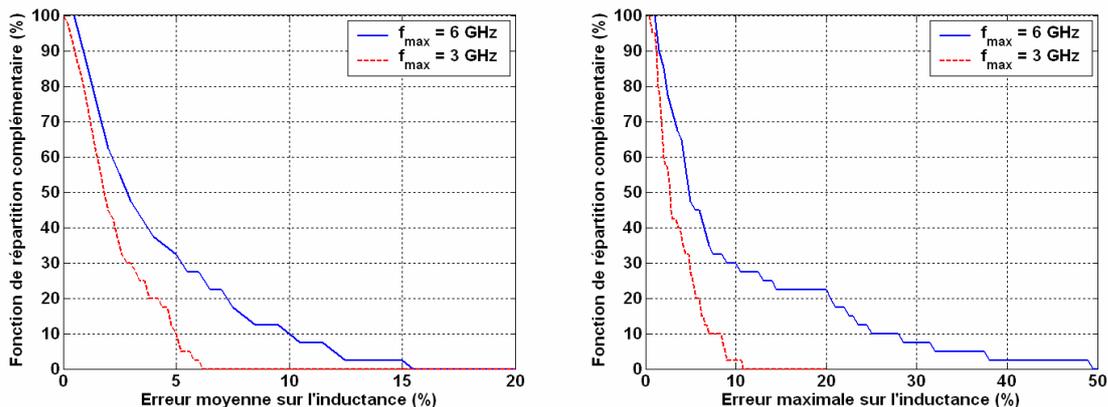


Figure 28 : Analyse statistique de l'erreur relative sur $L(f)$, comparaison à la mesure.

4.3.2. Étude de cas

Nous allons clore ce chapitre par deux exemples. Le premier graphique, Figure 29, représente les réponses électriques $R(f)$ et $L(f)$, mesurées et simulées, d'une inductance (L_1) dont les paramètres géométriques sont : $W = 30 \mu\text{m}$, $S = 20 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 75 \mu\text{m}$, $N_t = 3,5$, et $S_g = 50 \mu\text{m}$. Le second graphique, Figure 32, traite le cas de l'inductance (L_2) définie par : $W = 10 \mu\text{m}$, $S = 10 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 125 \mu\text{m}$, $N_t = 2,5$, $S_g = 150 \mu\text{m}$. Il s'agit là de deux cas typiques, correspondant cependant à des géométries bien distinctes. Notre objectif avoué est de fournir au lecteur une représentation visuelle à associer aux erreurs précédemment annoncées, afin qu'il puisse juger *de visu* des performances du modèle proposé.

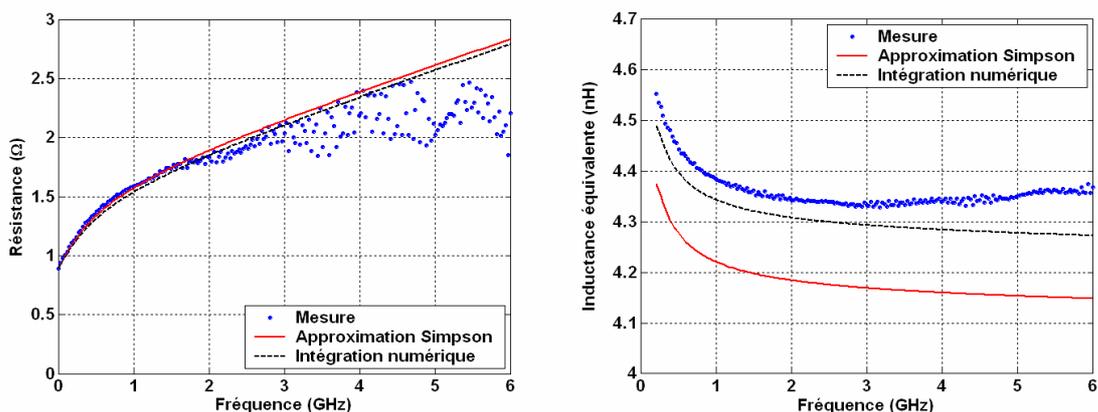


Figure 29 : Résistance et inductance équivalente de l'inductance L_1 .

Si l'on fait abstraction du décalage sur l'inductance équivalente $L(f)$, les courbes ci-dessus démontrent indubitablement qu'il existe un réel accord entre l'expérience et le modèle développé. On remarque, à l'examen de la composante résistive $R(f)$ de l'impédance équivalente, que la mesure de celle-ci est fortement bruitée au-delà de 3 GHz. Cela explique en partie le niveau des

erreurs relatives moyenne et maximale, notées e_R^{moy} et e_R^{max} dans le Tableau 11, lorsqu'elles sont calculées sur Δf_2 . Par ailleurs, notons que si les erreurs e_L^{moy} et e_L^{max} excèdent leurs équivalents statistiques (calculés au paragraphe 4.3.1), ce cas est néanmoins à mettre au bénéfice de la procédure de modélisation développée, l'intégration numérique conduisant ici à d'excellents résultats. Cet exemple permettra au lecteur, nous l'espérons, de relativiser la valeur de certaines erreurs mentionnées précédemment et qui, à n'en pas douter, ont pu lui paraître quelque peu alarmantes. Ainsi, même s'il est clair que la simulation de $R(f)$ surestime la mesure en haute fréquence, les similarités sont telles qu'elles impliquent une description convenable de la distribution de courant dans les conducteurs.

A chacun des plis de la fine draperie, représentée Figure 30, correspond l'amplitude J de la densité de courant traversant la section de chaque spire de l'enroulement (S_i et S_e). Le courant total injecté dans l'inductance \mathbf{L}_1 est d'intensité $I_{tot} = 1$ mA et de fréquence $f = 1$ GHz. La dimension verticale a été dilatée afin de faire apparaître plus clairement la répartition de celui-ci dans l'épaisseur du conducteur. On remarquera, tout d'abord, que la localisation du courant suivant cette dimension est négligeable. Nous corroborons donc ici les conclusions de l'analyse simpliste réalisée au paragraphe 4.1 du chapitre 2 : l'effet de peau est anisotrope lorsque la section de conduction est rectangulaire. Avec une profondeur de peau δ de $2,19 \mu\text{m}$ à 1 GHz, l'inégalité $\delta > T/2$ est vérifiée. L'effet de peau ne peut, en conséquence, être bidimensionnel. On notera également que le courant se concentre sur la face intérieure des spires internes, prouvant ainsi que notre simulateur est capable de représenter l'effet de proximité.

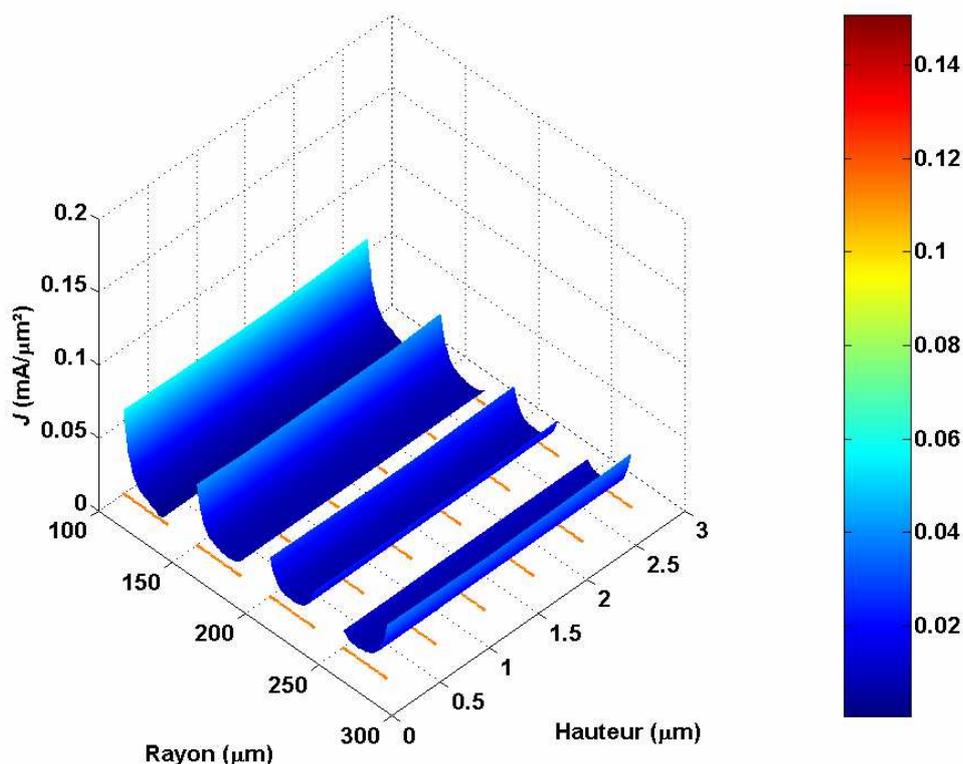


Figure 30 : Répartition du courant à 1 GHz dans chaque spire de l'inductance L_1 .

La Figure 31 est obtenue à la fréquence $f = 6$ GHz, les autres conditions étant par ailleurs identiques. Si la localisation radiale du courant s'intensifie et donne lieu à des profils très abrupts suivant le rayon, elle reste encore relativement faible dans l'épaisseur, ce qui se traduit par une fonction J variant mollement verticalement. Les résultats du paragraphe 3.4.1, ayant permis d'établir les règles de maillage des conducteurs, se voient donc être confirmés. On remarque également que la répartition du courant dans la spire externe (S_e) se distingue qualitativement de celles ayant cours dans les spires internes (S_i). En effet, seul le courant I_{S_e} (cf. Figure 19) est concentré sur le bord extérieur de la boucle. Ceci s'explique simplement à la lumière des lois comportementales suivantes, consécutives à l'effet de proximité. Les courants traversant, dans le même sens, deux conducteurs voisins ont tendance à se repousser, alors que les mêmes courants circulant en sens contraire s'attirent. Il en résulte que le courant I_{S_i} , fluant dans chaque spire interne, repousse I_{S_e} sur le bord externe de S_e et le courant I_{M_s} , dans le plan de masse supérieur (M_s), accentue ce phénomène en l'attirant.

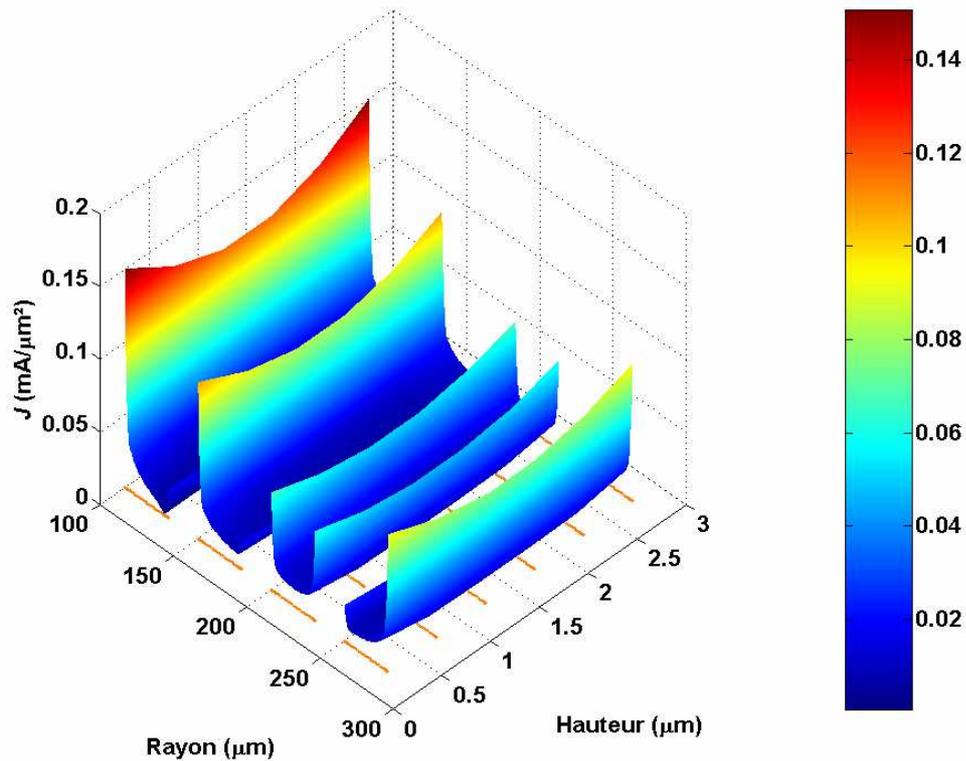
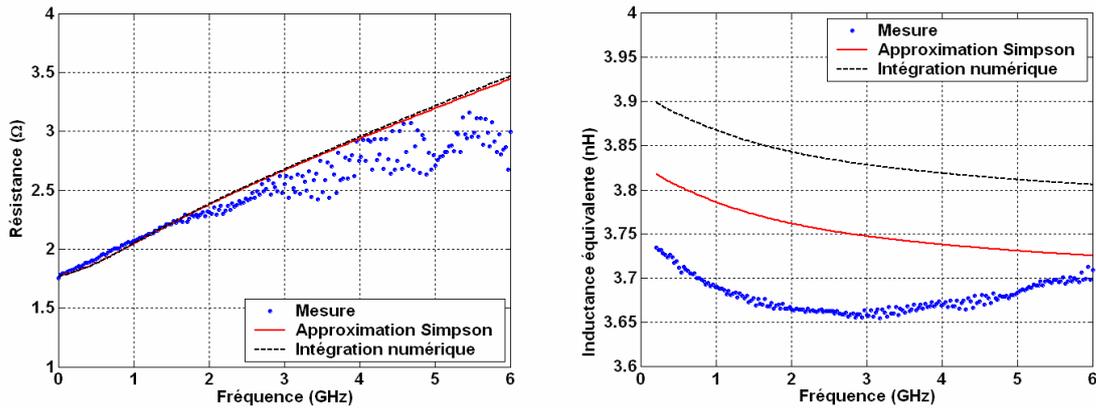


Figure 31 : Répartition du courant à 6 GHz dans chaque spire de l'inductance L_1 .

Le temps d'exécution total, inférieur à cinq minutes, est relativement court pour ce niveau de précision. Il est d'ailleurs loin d'être minimal. D'une part, l'algorithme de Landen, implémenté pour évaluer les intégrales elliptiques incomplètes, mène un calcul itératif supposé convergent lorsque l'écart entre deux itérations est inférieur à un certain seuil. La tolérance retenue, à savoir la précision machine $2,26 \cdot 10^{-16}$, est infime ce qui augmente notablement le temps t_c nécessaire à la construction de la matrice impédance $[Z_L]$. Cette valeur a été choisie par sécurité car, étant données les nombreuses approximations déjà réalisées, il nous a semblé judicieux d'éviter dans un premier temps une autre source d'erreurs potentielle. Le conditionnement de $[Z_L]$, extrêmement faible, laisse néanmoins supposer que la contrainte sur la convergence peut être relâchée sans pour autant impacter de manière significative les résultats. Une étude préliminaire, menée sur l'ensemble Λ , montre d'ailleurs que t_c se trouve être diminué de 12 % en moyenne lorsque la tolérance est fixée à 10^{-4} , avec une perte de précision inférieure à 0,01 %. D'autre part, nous n'avons pas encore mis à profit toutes les symétries du problème. La structure présente par exemple, dans le cas d'un substrat homogène, un plan de symétrie horizontal (XY). Certaines parties de la matrice impédance sont donc identiques, ce qui diminue, de fait, le nombre de calculs à réaliser.


 Figure 32 : Résistance et inductance équivalente de l'inductance L_2 .

La modélisation de la composante inductive de L_2 (Figure 32) est bonne, étayant l'idée que notre simulateur, développé autour de la méthode que nous avons introduite au cours de ce chapitre, est un outil de prédiction intéressant. L'intégration numérique conduit à significativement majorer la valeur de l'inductance, ce qui nous permet d'illustrer par l'exemple la compensation des erreurs que nous avons évoquée au paragraphe précédent. La légère remontée observée sur la mesure de l'inductance au-delà de 3 GHz est due aux effets capacitifs, que le simulateur ne peut représenter par construction. Une fois de plus, remarquons que le modèle surestime la résistance en haute fréquence. Celle-ci croît quasiment linéairement avec la fréquence et ce comportement se distingue notablement du cas précédent. Le facteur de forme W/T est en effet plus proche de l'unité, ce qui en d'autres termes signifie que la section de conduction de L_2 est plus symétrique que ne l'est celle de L_1 . Ainsi, en accord avec les résultats établis au chapitre 2, nous en concluons que l'effet de peau 2D doit être plus marqué pour l'inductance L_2 que pour L_1 . Ceci est effectivement confirmé par l'expérience.

Inductance	Intervalle	e_R^{moy} (%)	e_R^{max} (%)	e_L^{moy} (%)	e_L^{max} (%)
L_1	Δf_1	2,77	10,60	3,74	4,07
	Δf_2	10,06	51,26	4,06	5,19
L_2	Δf_1	2,27	8,32	2,55	2,79
	Δf_2	6,65	30,75	2,02	2,80

 Tableau 11 : Erreurs relatives moyennes et maximales sur $R(f)$ et $L(f)$, calculées pour les inductances L_1 et L_2 .

5. Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une version de la méthode PEEC spécifiquement dédiée aux composants à symétrie quasi circulaire, auxquels appartiennent les inductances

spiralées. Cette alternative a été retenue car elle s'accompagne d'une diminution drastique du nombre de mailles nécessaires à la discrétisation des conducteurs. L'économie descriptive réalisée peut alors être allouée à la modélisation d'un plan de masse coplanaire. La méthode approche les conducteurs à symétrie quasi axiale par des boucles circulaires concentriques, complètes ou incomplètes, ce qui autorise ensuite une discrétisation à l'aide d'anneaux circulaires de section rectangulaire. Cette transformation radicale de l'élément de décomposition a nécessité une refonte complète de la méthode avec, en particulier, le calcul analytique de l'interaction magnétique entre anneaux. Ce calcul n'a pu être mené sans faire certaines concessions à la rigueur mathématique. La première approximation ("Lyle") remplace chaque anneau circulaire par deux filaments, et la seconde ("Simpson") évite une coûteuse intégration numérique.

Décrire la mise en œuvre pratique de la méthode PEEC circulaire fut notre leitmotiv tout au long de ce chapitre. Cela s'est sans doute fait au dépend de la concision, mais il nous a semblé primordial que l'utilisateur dispose de données suffisantes lui permettant de se forger sa propre opinion quant à la pertinence de notre approche. Nous avons, par exemple, présenté en détail la technique retenue pour subdiviser les conducteurs, basée sur une simulation préliminaire 1D de l'inductance. Ce maillage est "automatique" car il ne nécessite pas de connaissance préalable sur la répartition du courant. Le traitement numérique impose qu'il soit fini, ce qui se traduit par un échantillonnage de la fonction associée au courant. Les conséquences de cette approximation – et des précédentes – ont été longuement discutées et nous nous sommes attachés à estimer les erreurs qui en découlent. Celles-ci sont récapitulées dans le Tableau 12.

Approximation	E_R^{moy} (%)	E_R^{max} (%)	E_L^{moy} (%)	E_L^{max} (%)
Maillage vertical à 0,5 μm	0,63	1,71	0,01	0,02
Maillage physique à 15 %	0,48	1,10	0,01	0,02
Simpson	0,73	1,29	2,06	2,09

Tableau 12 : Récapitulatif des erreurs introduites par les différentes approximations.

Les réelles qualités démontrées par le simulateur assoient, à notre avis, ce dernier dans le rôle que nous lui avons assigné : prédire efficacement le comportement d'une inductance spiralée munie d'un plan de masse coplanaire. Jusqu'à 3 GHz, l'erreur relative moyenne est statistiquement inférieure à 6 % sur la résistance $R(f)$ et 3 % sur l'inductance équivalente $L(f)$. Les résultats sont évidemment perfectibles et il est clair que le modèle devra en particulier intégrer les effets capacitifs si nous désirons une représentation satisfaisante jusqu'à 6 GHz. Nous avons montré qu'il était possible de les prendre en compte sans remettre en cause ce qui a déjà été réalisé. Des limites sont également apparues d'un point de vue magnétique puisque l'erreur sur $L(f)$ semble pouvoir

être liée à la distance au plan de masse et au nombre de tours. En déterminer les causes exactes n'est pas chose aisée, mais nous pouvons cependant nous essayer à livrer quelques pistes de recherche possibles. Peut-être avons-nous tout simplement atteint les limites de l'approximation de la spirale par des boucles concentriques. Le couplage magnétique entre la spirale, le pont et les lignes d'accès, est d'autre part négligé. Enfin, l'effet magnétique d'un substrat stratifié pourra également être exploré.

Affiner ou encore étendre le simulateur est un projet louable et nécessaire à terme. Il n'est cependant pas prioritaire à ce stade de nos travaux. Rappelons, en effet, l'objectif initial de ce travail de thèse, à savoir la synthèse d'un modèle d'inductances paramétré en fonction de la géométrie. Nous devons en conséquence nous atteler avant tout à la construction d'un modèle analytique à partir des modèles numériques produits par le simulateur.

Références

- [1] **F. Close**, *Asymétrie : la beauté du diable. Où se cache la symétrie de l'univers ?*, EDP Sciences, 2001, pp. 204.
- [2] **J. Maxwell**, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford : Clarendon – Macmillan, 1873.
- [3] **K. Yee**, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, Vol. 14, May 1966, pp. 302 – 307.
- [4] **P. Johns**, "A Symmetrical Condensed Node of the TLM Method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 35, n° 4, April 1987, pp. 370 – 377.
- [5] **P. Silvester**, "Finite-Element Analysis of Planar Microwave Networks", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 21, n° 2, 1973, pp. 104 – 108.
- [6] **M. Koshiba, M. Suzuki**, "Application of Boundary Element Method to Wave Guide Discontinuities", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 34, n° 2, February 1986, pp. 301 – 307.
- [7] **M. Ney**, "Method of Moments as Applied to Electromagnetic Problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 20, April 1972, pp. 245 – 252.
- [8] **A. Ruehli**, "Inductance Calculations in a Complex Integrated Circuit Environment", *IBM Journal of Research Development*, Vol. 16, September 1972, pp. 470 – 481.
- [9] **T. Itoh, R. Mittra**, "Spectral Domain Approach for Calculating the Dispersion Characteristics of Microstrip Lines", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 21, 1973, pp. 496 – 499.
- [10] **U. Schultz, R. Pregla**, "A New Technique for the Analysis of Planar Wave Guides and Its Application to Microstrip with Tuning Septums", *Radio Sciences*, Vol. 16, 1981.
- [11] **P. Valade**, "Développement et Mise en Oeuvre d'Outils de CAO Electromagnétique pour la Conception de Dispositifs Micro-Ondes et Optiques", *Thèse de doctorat de l'Université de Limoges*, Chapitre 1, Juin 2000, pp. 9 – 57.
- [12] **J. Whinnery, H. Jamieson**, "Equivalent Circuits for Discontinuities in Transmission Lines", *Proceedings of the I.R.E.*, Vol. 32, February 1944.
- [13] **S. Cohn**, "Properties of Ridge Wave Guide", *Proceedings of the I.R.E.*, Vol. 35, 1947, pp. 783 – 788.

- [14] **T. Okoshi, T. Miyoshi**, "The Planar Circuit – An Approach to Microwave Integrated Circuitry", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 20, April 1972, pp. 245 – 252.
- [15] **P. Johns, R. Beurle**, "Numerical Solution of 2-Dimensionnal Scattering Problems Using a Transmission-Line Matrix", *Proceedings of the Institute of Electrical Engineering*, Vol. 118, n° 9, 1971, pp. 1203 – 1208.
- [16] **F. Gardiol**, *Traité d'Electricité, Volume III, Electromagnétisme*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996, pp. 301.
- [17] **J.-P. Berenger**, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves", *Journal of Computed Physics*, Vol. 127, n° 2, 1996, pp. 363 – 379.
- [18] **L. Zhao, A. Cangarellis**, "GT-PML : Generalized Theory of Perfectly Matched Layers and its Application to the Reflectionless Truncation of Finite-Difference Time-Domain Grids", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 44, December 1996, pp. 2555 – 2563.
- [19] **D. Swanson, W. Hoefler**, "Numerical Electromagnetics", *Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation*, London : Artech House Publishers, Chapitre 3, 2003, pp. 60.
- [20] **R. Courant**, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", *Bulletin of the American Mathematics Society*, Vol. 49, 1943, pp. 1 – 23.
- [21] **R. Mac Withey, L. Vosteen**, "Effects of Transient Heating on the Vibration Frequencies of a Prototype of the X-15 Wing", *NASA TN D-362*, 1960.
- [22] **P. Silvester**, "Finite Element Solution of Homogeneous Waveguide Problems", *Alta Frequenza*, Vol. 38, 1969, pp. 313 – 317.
- [23] **A. Vander Vorst, A. Laloux**, "A Computer Optimization of the Rayleigh-Ritz Method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 17, August 1969, pp. 454 – 460.
- [24] **R. F. Harrington**, *Field Computation by Moment Methods*, New York : Macmillan, 1968.
- [25] **G. Roach**, *Green's Functions, 2nd edition*, Cambridge : Cambridge University Press, 1982.
- [26] **M. El Rhabi**, "Analyse Numérique et Discrétisation par Eléments Spectraux avec Joints des Equations Tridimensionnelles de l'Electromagnétisme", *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, 2002.

- [27] **J. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger**, "Equations de Maxwell : Approximation des Régimes Quasi Stationnaires", *Electromagnétisme : Fondements et Applications*, 3^{ième} édition, Paris : Editions Masson, Chapitre 16, 1997, pp. 281.
- [28] **W. Harokapus, L. Katehi**, "Electromagnetic Coupling and Radiation Loss Considerations in Microstrip MMIC Design", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, n° 3, March 1991, pp. 413 – 421.
- [29] **J. Kiang**, "Integral Equation Solution to the Skin Effect Problem in Conductor Strips of Finite Thickness ", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, n° 3, March 1991, pp. 452 – 460.
- [30] **A. Niknejad, R. Meyer**, "Numerically Stable Green Function for Modeling and Analysis of Substrate Coupling in Integrated Circuits", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Vol. 17, n° 4, April 1998, pp. 305 – 315.
- [31] **M. Tsai, F. De Flaviis, O. Fordham, N. Alexopoulos**, "Modeling Planar Arbitrarily Shaped Microstrip Elements in Multilayered Media", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 45, n° 3, March 1997, pp. 330 – 337.
- [32] **F. Burkett**, "Improved Designs for Thin Film Inductors", *Proceedings of the Electronic Components Conference*, 1971, pp. 184 – 194.
- [33] **J. Craninckx, M. Steyaert**, "A 1.8 GHz Low-Phase-Noise CMOS VCO Using Optimized Hollow Spiral Inductors", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 32, n° 5, May 1997, pp. 736 – 744.
- [34] **T. Huan-Shang, L. Jenshan Lin, R. Frye, K. Tai, M. Lau, D. Kossives, F. Hrycenko, C. Young-Kai**, "Investigation of Current Crowding Effect on Spiral Inductors", *IEEE Microwave Theory and Techniques International Symposium on Technologies for Wireless Applications Digest*, 1997, pp. 139 – 142.
- [35] **J. Tegopoulos, E. Kriezis**, *Eddy Currents in Linear Conducting Media*, Amsterdam : Elsevier Science Publication, 1985.
- [36] **A. Niknejad, R. Meyer**, "Analysis of Eddy-Current Losses Over Conductive Substrates with Applications to Monolithic Inductors and Transformers", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 49, n° 1, January 2001, pp. 166 – 176.
- [37] **W. Hurley, M. Duffy**, "Calculation of Self and Mutual Impedances in Planar Sandwich Inductors", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, n° 3, May 1997, pp. 2282 – 2289.

- [38] **F. Mahmoud, E. Beyne**, "Inductance and Quality-Factor Evaluation of Planar Lumped Inductors in a Multilayer Configuration", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 45, n° 6, June 1997, pp. 918 – 923.
- [39] **J. Lee, A. Abidi, N. Alexopoulos**, "Design of Spiral Inductors on Silicon Substrates with a Fast Simulator", *European Solid-State Integrated Circuits Conference*, 1998.
- [40] **J. Janak, D. Ling, H. Huang**, "C3DSTAR : A 3D Wiring Capacitance Calculator", *Digest of Technical Papers of the International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, November 1989, pp. 530 – 533.
- [41] **S. Iyanaga, Y. Kawada**, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1980, pp. 1472 – 1474.
- [42] **T. Smedes, N. Van Der Meijs, A. Van Genderen**, "Boundary Element Methods for 3D Capacitance and Substrate Resistance Calculations in Inhomogeneous Media in a VLSI Layout Verification Package", *Advances in Engineering Software*, Vol. 20, n° 1, 1994, pp. 19 – 27.
- [43] **A. Ruehli, P. Brennan**, "Efficient Capacitance Calculations for Three-Dimensional Multiconductor Systems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 21, n° 2, February 1973, pp. 76 – 82.
- [44] **Z. Jiang, P. Excell, Z. Hejazi**, "Calculation of Distributed Capacitances of Spiral Resonators ", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 45, n° 1, January 1997, pp. 139 – 142.
- [45] **A. Ruehli, P. Brennan**, "Capacitance Models for Integrated Circuit Metallization Wires", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 10, n° 6, December 1975, pp. 530 – 536.
- [46] **A. Patel**, "Calculation of Capacitance Coefficients for a System of Irregular Finite Conductors on a Dielectric Sheet", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 19, n° 11, November 1971, pp. 862 – 869.
- [47] **A. Abdelmageed, K. Michalski**, "Analysis of EM Scattering by Conducting Bodies of Revolution in Layered Media Using the Discrete Complex Image Method", *Antennas and Propagation Society International Symposium Digest*, 1995, Vol. 1, pp. 402 – 405.
- [48] **E. Weisstein**, "Integral Equation", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, pp. 910.

- [49] **W. Weeks, L. Wu, M. Mac Allister, A. Singh**, "Resistive and Inductive Skin Effect in Rectangular Conductors", *IBM Journal of Research Development*, Vol. 23, n° 6, November 1979, pp. 652 – 660.
- [50] **M. Kamon, M. Tsuk, J. White**, "FASTHENRY : A Multipole-Accelerated 3D Inductance Extraction Program", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 42, n° 9, September 1994, pp. 1750 – 1758.
- [51] **T. Johnson**, "Reduction of Very Large, Symmetric, Non-Sparse, Inductance Matrices", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 42, n° 9, September 1994, pp. 1750 – 1758.
- [52] **Laboratoire d'Electronique de Grenoble**, "InCa : Le chaînon Manquant en CAO Electronique", <http://www-leg.ensieg.inpg.fr/en/pdf/inca.pdf>.
- [53] **A. Niknejad**, "ASITIC : Analysis and Simulation of Spiral Inductors and Transformers for ICs", <http://formosa.eecs.berkeley.edu/~niknejad/asitic.html>.
- [54] **R. Faraji-Dana, Y. Chow**, "The Current Distribution and AC Resistance of a Microstrip Structure", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 38, n° 9, September 1990, pp. 1268 – 1277.
- [55] **J. Schanen, C. Guérin, J. Roudet, G. Meunier**, "Influence of a Conductive Plane on Loop Inductance ", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, n° 3, May 1995, pp. 2127 – 2130.
- [56] **R. Wu, J. Yang**, "Boundary Integral Equation Formulation of Skin Effect Problems in Multiconductor Transmission Lines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, n° 4, July 1989, pp. 3013 – 3015.
- [57] **C. Hoer, C. Love**, "Exact Inductance Equations for Rectangular Conductors with Applications to More Complicated Geometries", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 69-C, n° 2, April – June 1965, pp. 127 – 137.
- [58] **H. Greenhouse**, "Design of Planar Rectangular Microelectronic Inductors", *IEEE Transactions on Parts, Hybrids, and Packaging*, Vol. 10, n° 2, June 1974, pp. 101 – 109.
- [59] **D. Cabana**, "A New Transmission Line Approach for Designing Spiral Microstrip Inductors for Microwave Integrated Circuits", *IEEE Microwave Theory and Techniques International Symposium Digest*, Vol. 83, n° 1, May 1983, pp. 245 – 247.
- [60] **J. Long, M. Copeland**, "The Modeling, Characterization, and Design, of Monolithic Inductors for Silicon RF IC's", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 32, March 1997, pp. 357 – 369.

- [61] **C. Yue, S. Wong**, "Physical Modeling of Spiral Inductors on Silicon", *IEEE Transactions on Electron Devices*, Vol. 47, n° 3, March 2000, pp. 560 – 568.
- [62] **S. Mohan, M. Del Mar Hershenson, S. Boyd, T. Lee**, "Simple Accurate Expressions for Planar Spiral Inductances", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 34, n° 10, October 1999, pp. 1419 – 1424.
- [63] **S. Chaki, S. Aono, N. Andoh, Y. Sasaki, N. Tanino O. Ishihara**, "Experimental Study on Spiral Inductors", *IEEE Microwave Theory and Techniques International Symposium Digest*, June 1995, pp. 753 – 756.
- [64] **E. Clavel**, "Vers un Outil de Conception de Câblage : Le logiciel InCa", *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, Chapitre 1, Novembre 1996, pp. 69 – 71.
- [65] **X. Zhu**, "Modeling and Simulation of On-Chip Spiral Inductors and Transformers", *Cadence Application Note*, September 1999.
- [66] **R. Remke, G. Burdick**, "Spiral Inductors for Hybrid and Microwave Applications", *Proceedings of the 24th Electron Components Conference (Washington D. C.)*, May 1974, pp. 152 – 161.
- [67] **I. Marinova, Y. Midorikawa, S. Hayano, Y. Saito**, "Thin Film Transformer and Its Analysis by Integral Equation Method", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, n° 4, July 1995, pp. 2432 – 2437.
- [68] **B. Rejaei, J. Tauritz, P. Snoeij**, "A Predictive Model for Si-Based Circular Spiral Inductors", *IEEE Topical Meeting on Silicon Monolithic Integrated Circuits in RF Systems*, September 1998, pp. 148 – 153.
- [69] **J. Lee, T. Lee, S. Park, B. Min, M. Park, K. Lee, I. Choi**, "Comparison of Frequency Responses of Spiral Inductors with Different Figures", *Institute of Physics Publishing, Semiconductor Science and Technology*, Vol. 16, 2001, pp. 66 – 71.
- [70] **P. Leduc, A. Schellmanns, D. Magnon, F. Guitton**, "Modeling of Integrated Inductors with a Coplanar Ground Plane Using the PEEC Method", *European Microwave Week (Munich)*, October 2003.
- [71] **J. Spanier, K. Oldham**, "The Incomplete Elliptic Integrals $F(p, \phi)$ and $E(p, \phi)$ ", *An Atlas of Functions*, Washington D. C. : Hemisphere, Chapter 61, 1987, pp. 609 – 620.
- [72] **Wolfram Research Incorporation**, "Mathematica", <http://www.integrals.wolfram.com>.

- [73] **W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery**, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, second edition, Cambridge : Cambridge University Press, Chapter 4, 1992, pp. 131 – 132.
- [74] **E. Weisstein**, "Dilogarithm", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Chapman & Hall*, pp. 435.
- [75] **C. Osacar, J. Palacian, M. Palacios**, "Numerical Evaluation of the Dilogarithm of Complex Argument", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 62, 1995, pp. 93 – 98.
- [76] **Lyle**, *Phil. Mag.*, Vol. 3, 1902, pp. 310.
- [77] **Lyle**, *Bulletin of the Bureau of Standards*, Vol. 2, 1912, pp. 374 – 378.
- [78] **F. Grover**, *Inductance Calculations*, New York : Dover Publications, Chapter 2, 1962, pp. 12.
- [79] **Rayleigh**, *Bulletin of the Bureau of Standards*, Vol. 2, 1906, pp. 370.
- [80] **F. Grover**, *Inductance Calculations*, New York : Dover Publications, Chapter 3, 1962, pp. 22.
- [81] **E. Clavel**, "Vers un Outil de Conception de Câblage : Le logiciel InCa", *Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, Chapitre 1, Novembre 1996, pp. 46 – 47.
- [82] **E. Weisstein**, "Magic Square", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Chapman & Hall*, pp. 1127 – 1130.
- [83] **W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery**, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, second edition, Cambridge University Press, Chapter 4, 1992, pp. 43 – 50.
- [84] **Y. Saad, M. Schultz**, "GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Scientific and Statistical Computing*, Vol. 7, n° 3, July 1986, pp. 856 – 869.
- [85] **V. Strassen**, "Gaussian Elimination is not Optimal", *Numerical Mathematics*, Vol. 13, 1969, pp. 354 – 356.
- [86] **Y. Léger**, "Modélisation de Composants Rectilignes et de Résistances en Serpentin par la méthode PEEC", *Rapport en vue de l'obtention du diplôme de Licence de Physique*, Septembre 2002.
- [87] *Fortran 90 User's Guide, Revision A*, SunSoft, March 1995.
- [88] *Using Matlab, Version 6*, The MathWorks, August 2002.

Chapitre 4 :

Synthèse de modèles électriques paramétrés

"L'efficacité énorme des mathématiques dans les sciences de la nature est une chose presque mystérieuse. Il n'y a aucune explication rationnelle à cela."

E. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences".

1. Introduction	167
2. Modèle expérimental.....	168
2.1. Introduction.....	168
2.2. L'analyse de régression	170
2.2.1. <i>La méthode des moindres carrés</i>	170
2.2.2. <i>Décomposition en valeurs singulières</i>	171
2.3. Structure de la modélisation	173
2.3.1. <i>Fonction de transfert</i>	173
2.3.1.1 Modélisation de l'impédance.....	173
2.3.1.2 Application de la méthode	175
2.3.2. <i>Fonction "puissance"</i>	176
2.3.2.1 Modélisation de la composante résistive	177
2.3.2.2 Modélisation de la composante inductive.....	178
2.3.2.3 Application de la méthode	179
2.4. Génération d'un modèle comportemental	180
2.4.1. <i>Contexte de l'étude</i>	181
2.4.2. <i>Evaluation des modèles retenus</i>	183
2.4.3. <i>Sensibilité de l'extraction</i>	186
2.4.3.1 Intervalle de confiance.....	187
2.4.3.2 Affinage du modèle	191
3. Génération d'un modèle paramétré	194
3.1. Modèle polynomial.....	195
3.2. Les plans d'expériences	196
3.2.1. <i>Choix du type de plan</i>	197
3.2.2. <i>Algorithmes de construction du plan</i>	197
3.2.2.1 Algorithme de Galil-Kiefer.....	198
3.2.2.2 Algorithme de Johnson-Nachtsheim.....	198
3.2.3. <i>Considérations statistiques</i>	199
4. Application et résultats	199
4.1. Processus de modélisation	199
4.2. Modèles obtenus	202
4.2.1. <i>Comparaison à la simulation</i>	203
4.2.1.1 Le modèle Wheeler 2.....	203
4.2.1.2 Le modèle Wheeler 2 affiné.....	207
4.2.1.3 Le modèle Rationnelle 2.....	209
4.2.2. <i>Aptitude à la prédiction</i>	212
4.2.2.1 Simulations aléatoires	212
4.2.2.2 Confrontation à la mesure.....	214
5. Conclusion.....	218

1. Introduction

Nous avons, au chapitre précédent, mis en place un simulateur issu de la résolution partielle des équations de Maxwell par la méthode numérique PEEC ("Partial Element Equivalent Circuit"). Elle permet d'obtenir, à partir des caractéristiques géométriques d'une inductance, la valeur de l'impédance équivalente $Z_{num}(f)$. Cet outil, quoique fort utile, implique des temps de calcul non négligeables, ce qui interdit son intégration directe dans une bibliothèque de modèle. Les modèles comportementaux que nous avons établis au chapitre 2 ne prennent en compte qu'un nombre limité de variables géométriques, et sont en conséquence peu aptes à la prédiction. On prête à Paul Valéry une citation qui semble ici particulièrement adaptée : "Tout ce qui est simple est faux, tout ce qui est complexe est inutilisable".

Une alternative reste la production à partir du modèle physique d'un modèle comportemental, c'est-à-dire l'obtention à partir d'un modèle discret, d'un modèle continu paramétré en fonction de la géométrie. Plusieurs étapes sont nécessaires à la génération d'un tel modèle. La première consiste à projeter la réponse en fréquence discrète sur un ensemble de fonctions continues. Ainsi, la description du comportement fréquentiel de l'inductance se résume à la connaissance de ses coefficients de projection. Nous débuterons ce chapitre par une présentation succincte des divers concepts utilisés pour réaliser cette projection. En particulier, nous rappellerons dans les grandes lignes les principes de la méthode des moindres carrés, bien que celle-ci soit largement traitée dans la plupart des manuels d'analyse numérique. Cette entrée en matière nous est apparue nécessaire afin d'introduire le formalisme que nous utiliserons ensuite au cours de ce chapitre, mais surtout afin de mettre en avant les problématiques numériques relatives à l'extraction d'un modèle expérimental ainsi que les réponses que nous y avons apportées.

Plusieurs bases de projection sont dans un second temps évaluées, dans le but de déterminer une représentation comportementale efficace et précise. Nous traiterons par la suite de la robustesse de l'extraction réalisée, l'objectif de cette étude étant de juger, par des moyens statistiques, de la pertinence des coefficients extraits relativement à une incertitude sur l'impédance $Z_{num}(f)$. Cette approche peut apparaître quelque peu surprenante au premier abord, sachant que nous travaillons sur des données numériques. Elle permet néanmoins de conserver toute la généralité de la démarche, celle-ci pouvant tout aussi bien être appliquée à des mesures expérimentales $Z(f)$. De plus, nous verrons que dans le cas de simulations numériques, l'analyse réalisée, qui s'apparente à une analyse de sensibilité, est très informative et conduit à la mise en place d'une procédure d'affinage du modèle. L'idée sous-jacente, qui sera développée plus avant, est que le banc de mesures hyperfréquences permet une caractérisation des inductances avec un certain niveau de

précision, évalué au chapitre 1. Il est par conséquent inutile de compliquer le modèle comportemental au-delà d'une certaine limite, nous serions de toute manière incapables d'en apprécier la finesse. Le modèle obtenu peut, dans cette optique, être qualifié de minimum.

La dernière étape à la synthèse d'un modèle comportemental paramétré consiste à relier les coefficients précédemment extraits aux paramètres géométriques. Cette partie fait appel aux plans d'expériences dont nous rappellerons rapidement l'objet et la théorie. Nous mettrons en particulier l'accent sur les spécificités propres aux plans d'expériences numériques. Le modèle géométrique obtenu sera validé dans un premier temps par comparaison aux simulations numériques dont il est issu, puis par confrontation à la mesure.

2. Modèle expérimental

Nous débuterons cette partie avec quelques conventions de notation. Le processus de modélisation développé ci-après pouvant être appliqué indépendamment à une mesure $Z(f)$ ou bien à une simulation numérique $Z_{num}(f)$, ces deux variables seront désignées par le même diminutif $Z(f)$ lorsque la distinction ne sera pas nécessaire.

2.1. Introduction

La méthode PEEC nous permet d'évaluer l'impédance électrique Z d'une inductance spiralée, grandeur dépendant de la fréquence f . Il s'agit cependant d'une méthode numérique et comme pour la mesure, nous n'avons accès qu'à un ensemble fini de n valeurs Z_i , $i \in [1, n]$, calculées aux points de fréquence f_i . Un modèle de régression $Z_{reg}(f)$ vise à établir une relation entre la réponse Z et la variable de prédiction f en approchant la fonction $Z(f)$, connue uniquement partiellement, par une somme finie de p fonctions $X_k(f)$, $k \in [1, p]$, ce que l'on peut encore écrire :

$$Z_{reg}(f) = \sum_{k=1}^p a_k \cdot X_k(f) \approx Z(f) \quad (2.1)$$

L'objectif est donc de déterminer l'ensemble des fonctions de projection $\{X_k\}$, des coefficients de pondération a_k , et l'ordre p du modèle, qui permettent de reproduire fidèlement toutes les observations (f_i, Z_i) . En toute rigueur, il est possible de déterminer les p coefficients du modèle d'après p points expérimentaux. Nous entendons par points expérimentaux des points effectivement issus de la mesure, ou bien dans le cas qui nous concerne plus directement, des résultats de simulations numériques. Il est cependant plus judicieux d'extraire le modèle d'après n observations indépendantes, avec $n > p$. En effet, imposer un nombre de contraintes supérieur au nombre de degrés de liberté du système permet, d'une part, de s'assurer que le modèle extrait est

suffisamment précis, et d'autre part, de produire un intervalle de confiance sur les paramètres extraits comme nous le verrons par la suite. On peut alors interpoler, d'après le modèle de régression Z_{reg} , le comportement de la variable Z pour tout $f \in [f_1, f_n]$. La représentation de l'impédance sur toute la plage de fréquences se réduit ainsi à la connaissance de p fonctions X_k et de leurs paramètres associés a_k .

Il est important de clairement distinguer les paramètres de structure X_k , qui définissent l'ensemble des comportements que peut atteindre le modèle expérimental, et les paramètres d'ajustement a_k , qui déterminent un modèle particulier parmi toutes ces possibilités. Les méthodes mathématiques ne permettent pas d'accéder à la structure du modèle, qui en conséquence doit être imposée *a priori*. L'identification du modèle complet se réduit alors à la détermination des coefficients a_k , problème d'estimation largement traité en analyse numérique. La nature des fonctions X_k retenues pour projeter Z est évidemment primordiale, un choix judicieux simplifiant considérablement la solution au problème d'ajustement. En effet, pour un ordre p fixé, différentes familles de fonctions donneront lieu à une erreur résiduelle plus ou moins grande. En d'autres termes, pour une erreur résiduelle donnée, l'ordre du modèle, et *ipso facto* le nombre de coefficients a_k , sera d'autant plus faible que le système générateur $\{X_k\}$ respectera la structure de la fonction $Z(f)$ à représenter.

Notons que les fonctions X_k peuvent présenter une dépendance à la fréquence fortement non linéaire. En revanche, la relation liant la réponse Z aux coefficients a_k que l'on cherche à identifier est linéaire. Cette propriété fondamentale du modèle de régression autorise une résolution directe à l'aide des outils de l'algèbre linéaire.

$$Z_{reg}(f_i) = \sum_{k=1}^p a_k \cdot X_k(f_i) = Z_i + \varepsilon_i \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.2)$$

Le coefficient ε_i introduit ci-dessus correspond au résidu de l'échantillon i , c'est-à-dire à l'écart entre la valeur $Z_{reg}(f_i)$ prédite par le modèle de régression et la valeur observée Z_i . Il intègre l'erreur liée aux insuffisances du modèle à laquelle s'ajoute, dans le cadre d'observations expérimentales, l'incertitude intrinsèque à la mesure réalisée. En exprimant cet ensemble de n relations sous forme matricielle, plus compacte, on obtient finalement l'équation (2.3), dont la résolution fera l'objet du paragraphe suivant. La matrice X , de dimensions $n \times p$, est appelée matrice d'expériences et lie la réponse Z_{reg} à la variable de prédiction f . Le vecteur β contient les p coefficients du modèle et le vecteur z , les n observations de l'impédance Z . Enfin, le vecteur ε regroupe l'ensemble des résidus, également à déterminer.

$$X \cdot \beta = z + \varepsilon \quad (2.3)$$

$$\text{où } X = \begin{bmatrix} X_1(f_1) & \cdots & X_p(f_1) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1(f_n) & \cdots & X_p(f_n) \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.2. L'analyse de régression

L'objectif de l'analyse de régression est d'estimer les vecteurs β et ε , à savoir $n+p$ inconnues. N'ayant à notre disposition que n équations, le problème est *a priori* sous déterminé. Remarquons que si le vecteur β était connu, les composantes du terme d'erreur ε pourraient être directement déduites de l'équation (2.3). Ce n'est évidemment pas le cas et en conséquence, ε ne peut être qu'estimé d'après le vecteur $\hat{\beta}$ qui minimise la somme des résidus au carré χ^2 .

$$\chi^2(\beta) = \|X \cdot \beta - z\|_2 \quad (2.5)$$

$$\hat{\beta} = \min_{\beta} [\chi^2(\beta)] \quad (2.6)$$

2.2.1. La méthode des moindres carrés

La minimisation d'une fonction scalaire de p variables peut être réalisée à l'aide de méthodes d'optimisation itératives [1,2]. Dans notre cas cependant, elle se ramène à une simple inversion matricielle : la méthode des moindres carrés. On démontre en effet que $\hat{\beta}$ vérifie l'équation normale (2.7), qui traduit l'annulation des dérivées premières de χ^2 par rapport à β .

$$X^T X \cdot \hat{\beta} = X^T \cdot z \quad (2.7)$$

La matrice $C = X^T X$ est une matrice carrée de dimension $p \times p$, et le vecteur colonne $\zeta = X^T \cdot z$ comprend p composantes. Si la matrice C est régulière, c'est-à-dire inversible, on aboutit très simplement à la solution :

$$\hat{\beta} = C^{-1} \cdot \zeta \quad (2.8)$$

La matrice C est symétrique et définie positive. Il s'agit là de propriétés numériques très intéressantes qui donnent accès à de nombreuses techniques de résolution, comme par exemple la décomposition de Choleski [3]. En pratique malheureusement, cette matrice est souvent presque singulière et il n'est pas rare que les méthodes d'inversion conventionnelles échouent. Le degré de

singularité de la matrice C est mesuré par son conditionnement ρ , scalaire corrélant l'incertitude relative sur l'estimation de $\hat{\beta}$ aux incertitudes relatives sur C et ζ :

$$\frac{\|\Delta\hat{\beta}\|}{\|\hat{\beta}\|} \leq \rho(C) \cdot \left(\frac{\|\Delta C\|}{\|C\|} + \frac{\|\Delta\zeta\|}{\|\zeta\|} \right) \quad (2.9)$$

Notons qu'il s'agit là d'une inégalité et que dans certains cas [4], le conditionnement peut largement surestimer le facteur reliant effectivement ces incertitudes. Cependant, d'une manière générale, plus le conditionnement de la matrice est important, plus le traitement numérique que représente l'inversion est délicat et plus le résultat obtenu s'en trouve biaisé. Typiquement, un conditionnement de 10^{16} représente la limite à ne pas dépasser pour des calculs réalisés en double précision. On peut interpréter la singularité numérique de C comme une sensibilité exacerbée du problème d'identification aux perturbations de toutes sortes, qu'il s'agisse d'erreurs d'arrondis ou d'erreurs expérimentales. Le comportement pathologique des équations normales s'explique du fait que les observations réalisées ne permettent pas, dans de nombreux cas, de clairement distinguer les effets des fonctions de projection. Ainsi, différentes combinaisons de fonctions X_k reproduisent de manière quasi identique l'ensemble des observations de Z . Il s'ensuit une détermination ambiguë des paramètres a_k . Le lecteur objectera sans doute que la méthode des moindres carrés est utilisée sans précaution particulière dans de nombreux domaines sans pour autant donner des résultats aberrants. Il faut ici garder à l'esprit que nous ne cherchons pas à produire un modèle de représentation mais un modèle expérimental. Les coefficients a_k devront être, dans un second temps, corrélés à la géométrie et si l'identification à ce stade est équivoque, il n'y a guère de chance que nous puissions établir une relation satisfaisante ensuite.

2.2.2. Décomposition en valeurs singulières

La qualité numérique du système (2.3) à résoudre peut être considérablement améliorée grâce à un équilibrage de la matrice d'expériences [5], qui vise à égaliser la norme euclidienne de chaque ligne et de chaque colonne de X . Cette transformation, qui n'est rien d'autre qu'un changement de variable, conduit à un problème similaire au traitement numérique plus aisé [6]. L'équilibrage de la matrice d'expériences ne solutionne cependant pas les difficultés liées à l'équivalence numérique des fonctions X_k et une méthode de résolution plus robuste doit en conséquence être employée.

L'approche retenue est basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice d'expériences X . Cette décomposition est très souvent désignée par l'acronyme SVD, emprunt à

l'anglais "Singular Value Decomposition", et nous nous conformerons à l'usage dans ce qui suit. La décomposition SVD, introduite par Beltrami en 1873 [7] et Jordan en 1874 [8], s'inscrit dans le cadre d'une approche qui a révolutionné le calcul matriciel [9]. Elle a en outre donné lieu à de nombreuses applications dans les divers domaines de la science où le traitement du signal intervient [10]. L'algorithme de calcul associé [11], fort complexe, est réputé pour sa grande stabilité et peut être appliqué quel que soit le niveau de singularité de la matrice. La décomposition en valeurs singulières de X est donnée par la relation :

$$X = U \cdot S \cdot V^T \quad \text{où} \quad S = \begin{bmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_p \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La matrice S , de dimension $p \times p$, est diagonale et contient les valeurs singulières ω_k , $k \in [1, p]$, de X . Les matrices U et V , de dimensions respectives $n \times p$ et $p \times p$, sont toutes deux orthogonales, ce qui signifie que leurs colonnes respectives sont normées et orthogonales entre elles. Nous ne détaillerons pas ici l'ensemble des propriétés remarquables de ces matrices. Notons simplement que le conditionnement de X est donné par le rapport de la plus grande à la plus petite valeur singulière. Une matrice mal conditionnée conduit donc à une ou plusieurs valeurs singulières très faibles par rapport à la plus forte. D'autre part, la décomposition en valeurs singulières permet de résoudre l'équation (2.3) au sens des moindres carrés puisque l'on a :

$$\hat{\beta} = X^* \cdot z \quad \text{avec} \quad X^* = V \cdot S^* \cdot U^T \quad (2.11)$$

La matrice X^* est appelée pseudo-inverse de Moore-Penrose de X [12]. En effet, la matrice d'expériences, de dimension $n \times p$, est rectangulaire et n'admet pas d'inverse en toute rigueur. L'un des nombreux avantages de cette formulation est qu'elle n'implique pas la matrice C mais directement la matrice d'expériences X beaucoup mieux conditionnée. Les conditionnements de ces deux matrices sont en effet liés par la relation :

$$\rho(C) = \rho(X)^2 \quad (2.12)$$

La matrice S^* , également diagonale, est construite en appliquant la procédure (2.13). Il y apparaît qu'une valeur singulière ne sera inversée que si elle excède un certain seuil s . Du point de vue de la résolution, cela revient à exclure une combinaison linéaire de l'ensemble des équations que l'on tente de résoudre. Cela peut sembler paradoxal, mais l'on peut se convaincre de la pertinence de cette procédure en remarquant que l'on écarte ainsi une combinaison d'équations si sensible aux erreurs qu'elle est au mieux inutile.

$$\begin{cases} \omega_k > s \Rightarrow S_{kk}^* = \omega_k^{-1} \\ \omega_k \leq s \Rightarrow S_{kk}^* = 0 \end{cases} \quad k \in [1, p] \quad (2.13)$$

La notion de seuil reste somme toute relativement subjective, et fait à ce titre l'objet de nombreux articles. Nous retiendrons pour notre part la définition suivante [11] :

$$s = n \times \max_{k \in [1, p]} (\omega_k) \times \lambda \quad \text{où } \lambda \text{ est la précision du calcuateur} \quad (2.14)$$

2.3. Structure de la modélisation

Nous avons mis en évidence l'importance de la structure du modèle tant au niveau de l'efficacité de ce dernier, assimilée au nombre p de paramètres nécessaires à une représentation correcte, qu'au niveau de la résolution numérique qui en résulte, les effets des fonctions X_k devant être aussi distincts que possible. Nous allons dans ce qui suit présenter les deux modélisations que nous avons étudiées. La première utilise une fonction rationnelle polynomiale, encore appelée fonction de transfert, et la seconde, basée sur des considérations d'ordre physique, implique un développement en série de fonctions "puissance".

2.3.1. Fonction de transfert

2.3.1.1 Modélisation de l'impédance

L'extraction fiable des coefficients d'une fonction rationnelle polynomiale d'après la réponse fréquentielle d'un dispositif, qui fait appel à la méthode d'interpolation de Cauchy [13], a fait l'objet d'études approfondies. Cette représentation, naturelle en électronique, est en effet prolifique. La connaissance des pôles et des zéros d'une fonction de transfert permet par exemple l'étude de la stabilité d'un système bouclé. La fonction de transfert est également nécessaire aux algorithmes de synthèse de circuits électriques équivalents [14]. Soit $\omega = 2\pi f$, la pulsation angulaire et $s = j\omega$, la variable de Laplace. L'expression générale d'une fonction de transfert $H(s)$ est donnée par :

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{p_a} a_k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^{p_b} b_k \cdot s^k} \quad (2.15)$$

Les coefficients $a_k, k \in [0, p_a]$, et $b_k, k \in [0, p_b]$, sont complexes. Notons ici que les variables a_0 et b_0 sont redondantes, puisqu'une seule d'entre elles est nécessaire à la description du comportement statique de la fonction à interpoler [6]. Maintenir les deux variables conduirait à une formulation équivoque du problème d'interpolation, ce qui se traduit généralement par une matrice d'expériences numériquement singulière. Il s'ensuit inévitablement une détermination ambiguë des paramètres, ce que l'on doit éviter autant que faire se peut. Nous posons pour cette raison $b_0 = 1$.

$$H(s_i) = \frac{a_0 + \sum_{k=1}^{p_a} a_k \cdot s_i^k}{1 + \sum_{k=1}^{p_b} b_k \cdot s_i^k} = Z_i + \varepsilon_i \quad \forall i \in [1, n] \quad (2.16)$$

La simple observation de la formule ci-dessus met clairement en évidence la nature intrinsèquement non linéaire de ce problème d'estimation. Ces équations peuvent néanmoins être linéarisées en multipliant chacune de leurs composantes par le dénominateur :

$$\left[a_0 + \sum_{k=1}^{p_a} a_k \cdot s^k \right] - (Z_i + \varepsilon_i) \cdot \left[\sum_{k=1}^{p_b} b_k \cdot s^k \right] = Z_i + \varepsilon_i \quad (2.17)$$

En supposant que pour tout $i \in [1, n]$ le résidu ε_i est faible devant la réponse Z_i , condition d'une modélisation suffisante, vérifiable *a posteriori*, il vient :

$$\left[a_0 + \sum_{k=1}^{p_a} a_k \cdot s^k \right] - Z_i \cdot \left[\sum_{k=1}^{p_b} b_k \cdot s^k \right] = Z_i + \varepsilon_i \quad (2.18)$$

On retrouve ensuite une formulation conforme à l'équation (2.3) en exprimant cet ensemble de n équations sous forme matricielle.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & \cdots & s_1^{p_a} & -Z_1 \cdot s_1 & \cdots & -Z_1 \cdot s_1^{p_b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_i & \cdots & s_i^{p_a} & -Z_i \cdot s_i & \cdots & -Z_i \cdot s_i^{p_b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_n & \cdots & s_n^{p_a} & -Z_n \cdot s_n & \cdots & -Z_n \cdot s_n^{p_b} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p_a} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{p_b} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Cette procédure, initiée par Lévy [15], implique quelques concessions aux postulats sous-jacents à la méthode des moindres carrés. Ainsi peut-on remarquer, au regard de l'équation (2.18), que tous les paramètres à estimer ne sont plus équivalents puisque les coefficients $b_k, k \in [1, p_b]$,

sont pondérés par la réponse que l'on cherche à interpoler. De plus, les résidus ε_i , $i \in [1, n]$, ne représentent plus directement l'erreur sur la réponse Z en raison de l'approximation conduisant à la relation (2.18). La fonction χ^2 perd en conséquence sa qualité de critère de maximum de vraisemblance. L'estimation s'en trouve biaisée [16], mais pas de manière significative pour le problème qui nous occupe.

La procédure d'extraction en l'état présente l'inconvénient d'impliquer des nombres complexes (rappelons que $s = j\omega$), ce qui impose l'utilisation d'un logiciel de calcul spécifique. Nous mentionnons à ce titre une solution alternative, développée par K. Choi et M. Swaminathan [14], et n'engageant que des grandeurs réelles. Cette variante est obtenue en modifiant légèrement la formulation du problème :

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(X) \\ \operatorname{Im}(X) \end{bmatrix} \cdot \beta = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{bmatrix} + \varepsilon \quad (2.20)$$

2.3.1.2 Application de la méthode

Nous sommes restés jusqu'à lors très général, à la fois dans le formalisme employé et dans les remarques que nous avons faites. Cette approche a été retenue à dessein, afin que le lecteur puisse aussi facilement que possible appliquer la méthodologie que nous venons de décrire au cas qui le concerne. Malheureusement, la généralisation se fait trop souvent au détriment de la compréhension, et cet ouvrage n'échappe pas à cette règle. Un petit exemple d'illustration ne nous paraît pas superflu à ce stade, afin d'éclairer les esprits. Considérons à cet effet une inductance (notée \mathbf{L}_3) dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes : $W = 100 \mu\text{m}$, $S = 50 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 150 \mu\text{m}$, $N_t = 1,5$, $S_g = 20 \mu\text{m}$, $W_g = 400 \mu\text{m}$. Rappelons pour mémoire qu'il correspond à la variable W , la largeur des pistes de l'inductance, à la variable S , la distance inter-spices, à T , l'épaisseur des pistes, à R_{int} , le rayon interne, à N_t , le nombre de tours, à S_g , la distance au plan de masse et enfin à W_g , la largeur du plan de masse.

La réponse électrique $Z_{num}(f)$ de cette inductance est dans un premier temps simulée par la méthode PEEC en 31 points de fréquence uniformément répartis de 0 à 6 GHz. En interpolant $Z_{num}(f)$ par une fonction rationnelle d'ordre $p_a = p_b = 2$, à l'aide de la méthode SVD exposée en 2.2.2, on obtient la fonction $H(s)$ ci-dessous. Elle comporte cinq coefficients complexes, c'est-à-dire dix coefficients réels.

$$H(s) = \frac{(2,37 + 0,74 \cdot j) \cdot 10^{-1} + (1,59 - 0,12 \cdot j) \cdot 10^{-9} \times s + (0,20 - 3,80 \cdot j) \cdot 10^{-19} \times s^2}{1 + (0,14 - 2,43 \cdot j) \cdot 10^{-10} \times s - (6,36 + 7,03 \cdot j) \cdot 10^{-24} \times s^2} \quad (2.21)$$

La Figure 1 démontre, s'il en est besoin, l'excellent accord existant entre la fonction d'interpolation et la simulation initiale. L'erreur maximale est très faible et n'excède pas 0,25 %, que ce soit pour la résistance ou l'inductance équivalente. Nous pouvons donc considérer en première analyse que les paramètres extraits $\{a_0, a_1, a_2; b_1, b_2\}$ sont représentatifs de la fonction interpolée $Z_{num}(f)$.

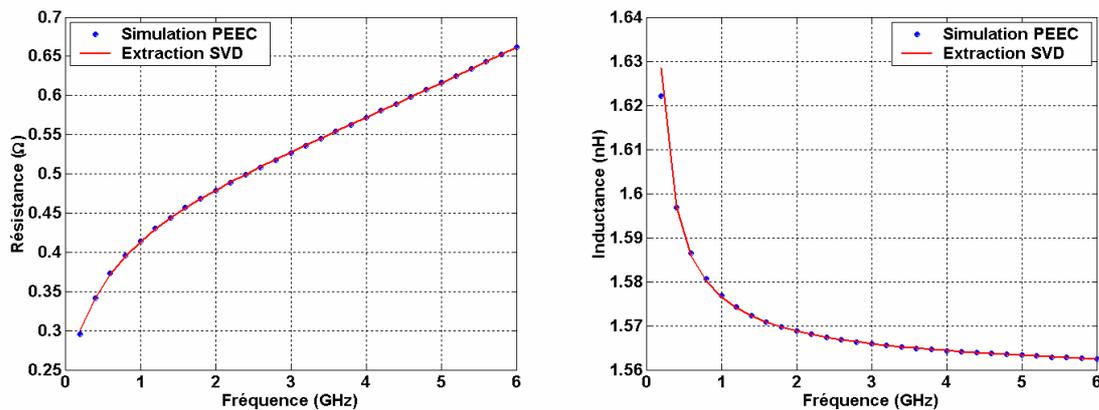


Figure 1 : Interpolation de l'impédance équivalente $Z_{num}(f)$ par une fonction rationnelle complexe H .

2.3.2. Fonction "puissance"

Une fonction rationnelle polynomiale, si elle autorise une description précise de l'impédance équivalente $Z(f)$, reste néanmoins délicate à interpréter. Il semble en effet difficile, pour ne pas dire impossible, d'associer aux différents paramètres extraits une quelconque signification physique. Nous parlerons donc dans ce cas de modèle de représentation et non pas de modèle expérimental. Ne perdons pas de vue l'objectif de ce chapitre : la synthèse d'un modèle paramétré en fonction de la géométrie, à partir d'un ensemble d'extractions réalisées sur des simulations. Un tel modèle se veut prédictif, ce qui signifie qu'il ne peut se limiter à une représentation mathématique correcte des simulations dont il est issu. Cette dernière contrainte, très forte, impose en toute logique que les fonctions d'interpolation aient un sens physique, c'est-à-dire qu'elles reflètent au moins partiellement les différents phénomènes impliqués dans la réponse électrique. Il est légitime de penser, au regard de la Figure 1, que la résistance $R(f)$ et l'inductance équivalente $L(f)$ ne pourront être décrites par les mêmes fonctions d'interpolation. Ces deux grandeurs sont donc traitées séparément.

$$R(f) = \text{Re}[Z(f)] \quad L(f) = \frac{\text{Im}[Z(f)]}{\omega} \quad (2.22)$$

2.3.2.1 Modélisation de la composante résistive

Il a été démontré au chapitre 2 qu'en première approximation, l'évolution fréquentielle de la résistance $R(f)$ d'une inductance spiralée peut être structurellement représentée par la fonction $\{\sqrt{f}\}$ ou bien la fonction $\{f\}$, suivant que la conduction est dirigée par l'effet de peau unidimensionnel (1D) ou bidimensionnel (2D). Nous avons également évoqué l'apparition dans le cas d'inductances spiralées d'un phénomène électromagnétique plus complexe, l'effet de proximité, qui se traduit par une localisation du courant sur la face interne des spires intérieures. Lopez-Villegas *et al.* [17] donnent, pour les inductances rectangulaires, une expression analytique de la résistance imputable à l'effet de proximité. Les travaux réalisés mettent en évidence une dépendance quadratique de la résistance à la fréquence.

De nombreuses études expérimentales sur ce type de géométrie rapportent un comportement fréquentiel de la résistance d'une inductance spiralée de la forme $\{f^\alpha\}$. La plage de variation de l'exposant α diffère suivant les sources. Ashby *et al.* [18] ont pris le parti d'une représentation globale, ils associent au coefficient α l'ensemble des phénomènes physiques décrits précédemment. Ce paramètre d'ajustement appartient alors à l'intervalle $[0,5, 2]$. Le modèle, retenu par Park *et al.* [19], distingue clairement l'effet de peau unidimensionnel des autres phénomènes pour obtenir $\alpha \in [0,5, 3]$. Ces divergences ne sont pas fondamentales et ne doivent pas nous faire perdre de vue le plus important, résumé dans le Tableau 1 ci-dessous.

Paramètre α	Phénomène physique
0,5	Effet de peau 1D
1	Effet de peau 2D
≈ 2	Effet de proximité

Tableau 1 : Dépendance fréquentielle de la résistance d'une inductance spiralée et sa justification physique.

Dès lors, la famille de fonctions que nous devons utiliser pour représenter physiquement la résistance est clairement identifiée. Nous retiendrons l'ensemble $\{f^{k/2}\}$, où k est un entier compris entre 0 et p_R . La décomposition qui en découle ainsi que le problème d'identification associé sont respectivement donnés en (2.23) et (2.24). Cette approche constitue, à notre avis, un outil d'analyse puissant permettant une compréhension plus profonde de la relation intime liant la réponse électrique $R(f)$ aux phénomènes électromagnétiques sous-jacents. En ce sens, il s'agit bien là d'un modèle expérimental de connaissance. Par exemple, si l'on travaille en fréquences normalisées, la

comparaison des valeurs des coefficients R_k est une mesure directe de l'influence relative des différents processus de conduction sur la réponse.

$$R_{reg}(f) = \sum_{k=0}^{p_R} R_k \cdot f^{\frac{k}{2}} = R_{dc} + \sum_{k=1}^{p_R} R_k \cdot f^{\frac{k}{2}} \approx R(f) \quad (2.23)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{f_1^2} & \dots & \frac{p_R}{f_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{f_i^2} & \dots & \frac{p_R}{f_i^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{f_n^2} & \dots & \frac{p_R}{f_n^2} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} R_{dc} \\ \vdots \\ R_{p_R} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} \text{Re}(Z_1) \\ \vdots \\ \text{Re}(Z_n) \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Il est encore possible de simplifier l'énoncé ci-dessus en remarquant que la résistance en continu, R_{dc} , est aisément et précisément calculable analytiquement. Ce paramètre est donc d'ores et déjà exprimé en fonction de la géométrie, et peut en conséquence être écarté du processus de modélisation. Le problème d'identification est alors formulé légèrement différemment :

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1^2} & \dots & \frac{p_R}{f_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{f_i^2} & \dots & \frac{p_R}{f_i^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{f_n^2} & \dots & \frac{p_R}{f_n^2} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{p_R} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} \text{Re}(Z_1) - R_{dc} \\ \vdots \\ \text{Re}(Z_n) - R_{dc} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

2.3.2.2 Modélisation de la composante inductive

La démarche résolument empirique adoptée au chapitre 2 a également révélé la nature mathématique des variations de l'inductance équivalente, directement liées à l'annulation de l'inductance interne. Ainsi $L(f)$ est-elle descriptive à l'aide de la fonction $1/\sqrt{f}$. Ce résultat n'est évidemment valable que dans le cadre quasi statique, et par-là même dans un domaine fréquentiel où l'effet des charges surfaciques est négligeable. La méthode numérique PEEC s'insère par essence dans ce cadre, l'extraction peut donc être réalisée sur une simulation PEEC sans précaution aucune. On devra par contre s'assurer, et cette remarque s'applique également à la composante résistive, que l'hypothèse quasi statique est vérifiée lorsque l'extraction porte sur des données expérimentales.

Nous allons à présent généraliser la loi de Wheeler c'est-à-dire supposer, par analogie avec le modèle résistif, que le comportement fréquentiel de l'inductance $L(f)$ peut être décrit par la famille de fonctions $\{f^{-k/2}\}$, où k est un entier compris entre 0 et p_L . La décomposition de $L(f)$ ainsi que le problème d'identification ont alors pour expressions respectives :

$$L_{reg}(f) = \sum_{k=0}^{p_L} L_k \cdot f^{-\frac{k}{2}} = L_{ac} + \sum_{k=1}^{p_L} L_k \cdot f^{-\frac{k}{2}} \approx L(f) \quad (2.26)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & f_1^{-\frac{1}{2}} & \dots & f_1^{-\frac{p_L}{2}} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & f_i^{-\frac{1}{2}} & \dots & f_i^{-\frac{p_L}{2}} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & f_n^{-\frac{1}{2}} & \dots & f_n^{-\frac{p_L}{2}} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} L_{ac} \\ \vdots \\ L_{p_L} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} \frac{\text{Im}(Z_1)}{\omega_1} \\ \vdots \\ \frac{\text{Im}(Z_n)}{\omega_n} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Le raisonnement intuitif ayant conduit à la relation (2.26) pourra sans aucun doute être qualifié de spécieux, au sens où il ne justifie pas pleinement le choix des fonctions de projection. Le calcul de l'inductance interne d'un conducteur à section rectangulaire est malheureusement extrêmement complexe et nous n'avons pas pu extraire une forme analytique exploitable même dans le cas le plus simple de la section de conduction effective, présentée dans le chapitre 2. Les résultats obtenus sont cependant suffisamment intéressants pour justifier notre choix comme nous allons le voir maintenant.

2.3.2.3 Application de la méthode

La méthode d'extraction décrite précédemment a été appliquée à l'inductance (notée L_4) suivante : $W = 10 \mu\text{m}$, $S = 10 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 225 \mu\text{m}$, $N_t = 1,5$, $S_g = 20 \mu\text{m}$, $W_g = 400 \mu\text{m}$. Le modèle extrait, défini par $p_R = p_L = 4$, comprend dix coefficients réels. Les deux approximations (2.28) et (2.29) sont excellentes, comme le montre la Figure 2, avec une erreur maximale de l'ordre de 0,15 % sur la résistance et de 0,02 % sur l'inductance.

$$R_{reg}(f) = 1,51 - 0,04 \times f_r^{1/2} + 2,35 \times f_r - 0,91 \times f_r^{3/2} + 0,10 \times f_r^2 \quad (2.28)$$

$$L_{reg}(f) = 2,19 \cdot 10^{-9} + \frac{8,78 \cdot 10^{-11}}{f_r^{1/2}} - \frac{1,84 \cdot 10^{-11}}{f_r} + \frac{1,51 \cdot 10^{-12}}{f_r^{3/2}} - \frac{9,98 \cdot 10^{-15}}{f_r^2} \quad (2.29)$$

Les fréquences ont été réduites afin de faire apparaître l'effet des différentes composantes du modèle : $f_r = f / f_{max}$, où $f_{max} = 6$ GHz. Une fonction de projection sera d'autant plus influente que son coefficient multiplicateur sera grand. Ainsi, on constate que la résistance $R(f)$ est en premier lieu influencée par la fonction f_r . Nous en concluons que sur la plage de fréquences considérée, la conduction est dominée par l'effet de peau bidimensionnel. Cet exemple met également en évidence un résultat fort ennuyeux. Nous remarquons, en effet, la présence dans la décomposition de coefficients négatifs qui ne peuvent avoir de signification physique. Ce problème réduit considérablement au premier abord nos ambitions initiales, et sera abordé plus en détail ultérieurement.

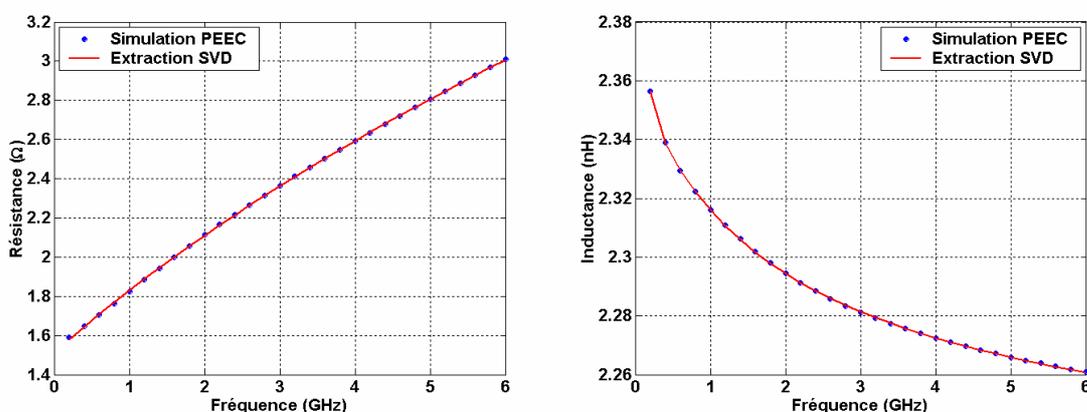


Figure 2 : Interpolation de la résistance $R_{num}(f)$ et de l'inductance équivalente $L_{num}(f)$ par des fonctions "puissance".

2.4. Génération d'un modèle comportemental

Nous allons tenter dans cette partie de déterminer une représentation optimale de l'impédance équivalente, c'est-à-dire le modèle le plus simple possible nous permettant d'obtenir des résultats fidèles. L'Histoire a en effet montré, en diverses occasions, qu'un certain minimalisme en sciences était souvent fécond. Plus sérieusement, nous nous sommes précédemment attachés à souligner, s'il en était besoin, toutes les difficultés liées à l'extraction des paramètres d'un modèle de régression lorsque sa complexité augmente. Elles constituent autant d'écueils qu'il serait sage d'éviter.

L'optimalité est une notion des plus relatives, et dépend des critères de comparaison que l'on veut bien se donner. La définition que l'on en donne est souvent très générale, tellement générale d'ailleurs qu'elle en devient vide de sens en dehors d'un cadre appliqué. Nous commencerons donc par préciser le contexte de l'étude, ce qui nous permettra dans un second temps de choisir entre les différentes représentations que nous avons présentées. Nous tenterons ensuite d'évaluer la

robustesse de la modélisation retenue par une approche statistique, ceci dans le but de critiquer la pertinence des coefficients extraits.

2.4.1. Contexte de l'étude

Quatre modèles d'interpolation de la fonction $Z(f)$ ont longuement été discutés dans la précédente partie. Récapitulons pour mémoire leur principale caractéristique. Le premier, que nous appellerons **Rationnelle 1**, utilise une fonction rationnelle à coefficients complexes, et le second (**Rationnelle 2**), une fonction rationnelle à coefficients réels. Le troisième (**Wheeler 1**) traite quant à lui indépendamment la résistance et l'inductance équivalente et fait appel aux fonctions de Wheeler. Le dernier modèle enfin (**Wheeler 2**), n'est qu'une variante du précédent et ne diffère qu'en fixant la résistance en continue R_{dc} . Nous chercherons, dans ce qui suit, à donner l'évolution de la précision de ces représentations en fonction de leur complexité, c'est-à-dire en fonction du nombre total p de coefficients impliqués dans le modèle. Cette étude doit nous permettre ensuite l'estimation, pour chacune d'entre elles, du nombre de réponses nécessaires à l'obtention d'une description correcte de l'impédance $Z(f)$.

Il convient avant toute chose de préciser ce que nous entendons par "correct", terme qui dans l'absolu n'a guère de sens, une fois de plus. En effet, à partir de quelle précision pouvons-nous retenir une représentation comme étant satisfaisante ? Le juge de paix le plus fiable en la matière reste à nos yeux l'expérience et nous allons en conséquence adopter la définition suivante : une régression sera acceptée lorsque l'erreur qu'elle introduit sera inférieure à l'incertitude expérimentale. Ainsi, bien que travaillant sur un ensemble de simulations numériques, par essence reproductibles, nous leur associerons désormais l'incertitude expérimentale déterminée au chapitre 1 et rappelée dans le Tableau 2. Cette dernière constitue en effet un critère objectif nous permettant de discuter plus finement de la performance d'un modèle. Rappelons que l'incertitude sur l'inductance équivalente $L(f)$ est quasiment identique à l'incertitude sur la partie imaginaire de $Z(f)$.

Incertitude	Résistance équivalente	Inductance équivalente
Cas typique (%)	2	0,2
Pire cas (%)	4	0,3

Tableau 2 : Incertitude expérimentale sur la résistance et l'inductance équivalente.

La complexité de chaque modèle, c'est-à-dire le nombre p de paramètres impliqués, est complètement caractérisée par la connaissance d'un couple d'entiers définissant l'ordre des

polynômes employés : (p_a, p_b) dans le cas des modèles **Rationnelle 1** et **Rationnelle 2**, et (p_R, p_L) dans le cas des modèles **Wheeler 1** et **Wheeler 2**. Le Tableau 3 lie, pour chaque représentation, l'ordre à la complexité.

Rationnelle 1	Rationnelle 2	Wheeler 1	Wheeler 2
$p = 4k, k \text{ entier}$	$p = 2k, k \text{ entier}$	$p = 2k, k \text{ entier}$	$p = 2k, k \text{ entier}$
$p_a = k$ $p_b = k - 1$	$p_a = k$ $p_b = k - 1$	$p_R = k - 1$ $p_L = k - 1$	$p_R = k$ $p_L = k - 1$

Tableau 3 : Relation entre le nombre total p de paramètres et l'ordre des différents modèles.

Ces lois de répartition ne sont évidemment pas uniques et les critères ci-après ont pour notre part été retenus. Nous avons cherché à établir, d'une part, un partage aussi équitable que possible des p variables entre les différents polynômes et d'autre part, à assurer les comportements asymptotiques imposés par l'hypothèse quasi statique :

$$\lim_{f \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[Z(f)] = \infty \quad \lim_{f \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[Z(f)] = \infty \quad (2.30)$$

L'étude que nous allons mener porte sur $N = 199$ simulations d'inductances aux caractéristiques diverses. Les plages de variation des paramètres géométriques libres, à savoir : la largeur des pistes (W), l'espacement inter-spires (S), le rayon interne (R_{int}), le nombre de tours (N_t), et enfin l'espacement au plan de masse (S_g), sont spécifiées dans le Tableau 4. Le domaine Ψ ainsi balayé couvre approximativement l'ensemble des inductances pouvant être correctement décrites par un modèle inductif uniquement.

	W (μm)	S (μm)	R_{int} (μm)	N_t	S_g (μm)
Minimum	10	10	75	1,5	20
Maximum	100	50	275	4,5	200

Tableau 4 : Domaine de définition de l'ensemble d'inductances Ψ .

Les simulations sont réalisées en $n = 31$ points de fréquence, uniformément distribués sur la plage $\Delta f = [0, 6]$ GHz. Nous reprenons ici la procédure de comparaison appliquée au paragraphe 3.4.1 du chapitre précédent. Les erreurs moyennes (e_R^{moy}, e_L^{moy}) et maximales (e_R^{\max}, e_L^{\max}) induites par les approximations **Rationnelle 1**, **Rationnelle 2**, **Wheeler 1** et **Wheeler 2** sur la résistance et l'inductance équivalente, sont calculées pour chaque élément de l'ensemble Ψ et pour un nombre de paramètres allant croissant. Les résultats consignés ci-après portent sur la moyenne – notée

E_R^{moy} , E_L^{moy} , E_R^{max} , E_L^{max} suivant le type d'erreur – de toutes ces extractions, afin de mesurer la qualité globale de celles-ci.

2.4.2. Evaluation des modèles retenus

La Figure 3 reproduit la moyenne sur Ψ de l'erreur relative moyenne résiduelle sur la résistance (E_R^{moy}) en fonction du nombre de paramètres p du modèle considéré. On remarque que cette grandeur, quel que soit le modèle, diminue avec le nombre de coefficients et donc avec le nombre de fonctions impliquées dans la représentation. Ainsi, pour un nombre de paramètres supérieur à six, le défaut de modélisation sur la bande de fréquences Δf est inférieur à 1 %. Lorsque p devient grand, la base de Wheeler semble légèrement plus performante. Ceci n'est cependant pas un argument décisif en faveur de cette dernière car lorsque l'on confronte l'erreur de modélisation E_R^{moy} à l'incertitude expérimentale, il apparaît qu'elle devient très rapidement négligeable. Notons également que le modèle **Rationnelle 2** donne des résultats légèrement supérieurs au modèle **Rationnelle 1**. Cette différence a probablement une origine d'ordre numérique. En effet, les conditionnements matriciels $\rho(X)$ observés sont, à nombre égal de réponses, bien plus faible pour **Rationnelle 2**.

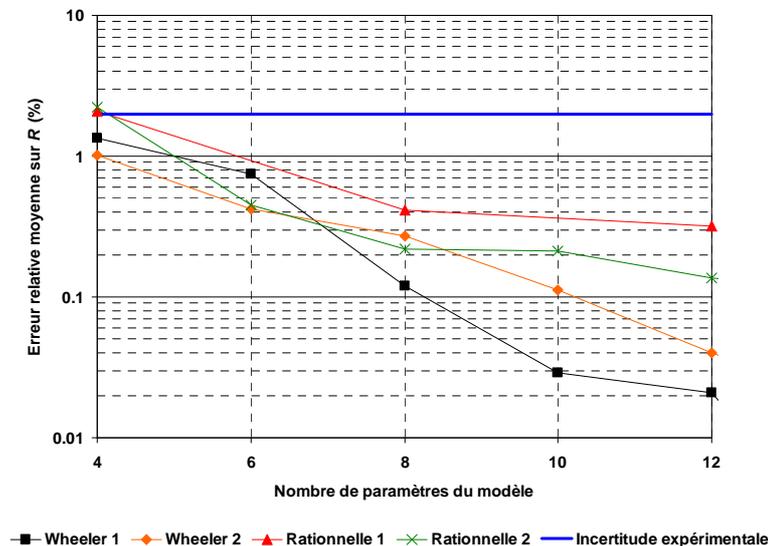


Figure 3 : Influence du nombre de paramètres sur l'erreur relative moyenne commise sur la résistance R .

Les mêmes remarques prévalent lorsque l'on considère l'inductance équivalente, Figure 4. L'erreur relative moyenne observée (E_L^{moy}) est faible, et n'excède pas 0,1 % dans tous les cas pour $p = 6$. Cette valeur est à mettre en relation avec l'incertitude expérimentale de l'ordre de 0,2 %. Notons qu'il n'y a aucune différence entre les modèles **Wheeler 1** et **Wheeler 2**, qui ne diffèrent que par le traitement de la résistance. Nous pouvons ici conclure qu'au regard de l'erreur relative

moyenne, toutes les bases de projection étudiées sont efficaces et équivalentes. Cet outil de comparaison ne se montre pas suffisamment sélectif et nous l'abandonnons en conséquence pour le critère plus strict que constitue l'erreur relative maximale observée sur la résistance (E_R^{\max}). Les différences entre modèles apparaissent alors beaucoup plus marquées.

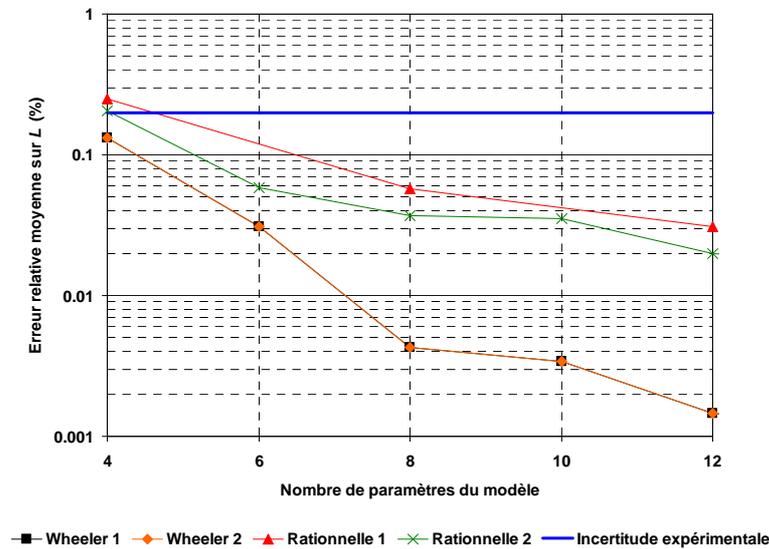


Figure 4 : Influence du nombre de paramètres sur l'erreur relative moyenne commise sur l'inductance L .

La moyenne sur l'ensemble Ψ de l'erreur relative E_R^{\max} est représentée Figure 5 comme fonction de la complexité. Elle diminue faiblement avec le nombre de réponses et nous pouvons retenir que pas moins de huit réponses sont nécessaires si l'on désire assurer une erreur de représentation inférieure à l'incertitude expérimentale. Les différentes méthodes se démarquent ici légèrement. Ainsi, E_R^{\max} stagne rapidement dans le cas des modèles **Rationnelle 1** et **Rationnelle 2** et ne semble pas pouvoir descendre en dessous de 1 %, ce que permettent **Wheeler 1** et **Wheeler 2**.

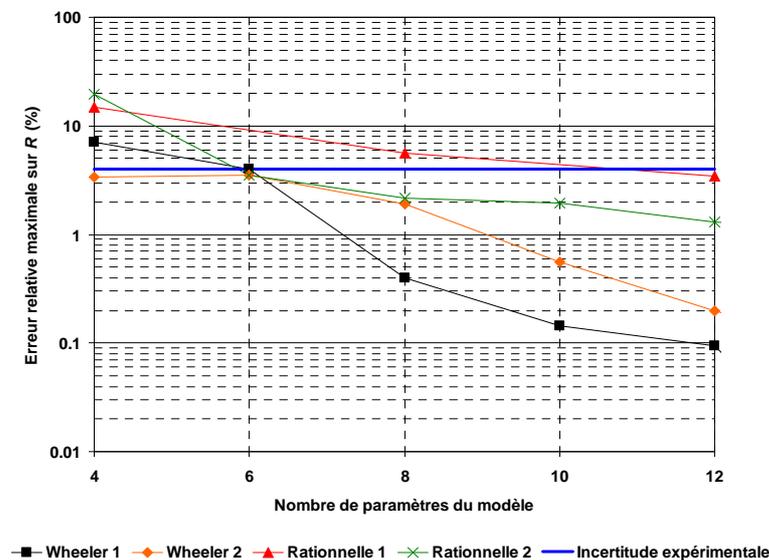


Figure 5 : Influence du nombre de paramètres sur l'erreur relative maximale commise sur la résistance R .

Les choses n'en vont pas du tout de même en ce qui concerne l'erreur maximale (E_L^{\max}) commise sur l'inductance. En effet, seule la base de Wheeler permet de descendre en dessous de l'erreur expérimentale. Il est important que l'erreur de représentation soit faible devant l'erreur expérimentale. En effet, lorsque cette condition est remplie, le modèle extrait peut être considéré comme un équivalent de la simulation initiale. L'étape d'extraction est alors parfaitement transparente.

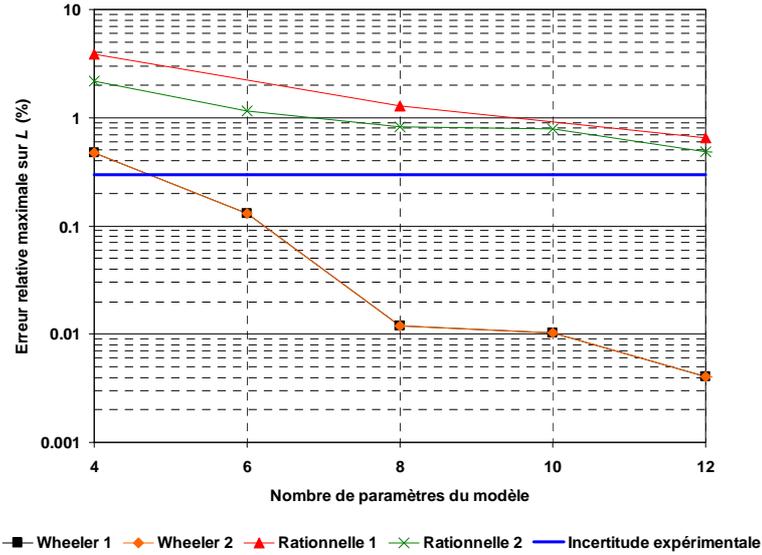


Figure 6 : Influence du nombre de paramètres sur l'erreur relative maximale commise sur l'inductance L .

Pousser la complexité p d'un modèle lorsque le critère de la précision est satisfait n'a d'intérêt que si la liaison à la géométrie des réponses $\hat{\beta}_k$, $k \in [1, p]$, est ensuite plus aisée. Considérons l'ensemble d'inductances Ψ défini au paragraphe précédent, et soit $\hat{\beta}_{ki}$ le coefficient $\hat{\beta}_k$ associé à la $i^{\text{ème}}$ inductance de l'ensemble. L'étape de corrélation des réponses à la géométrie se fera *a priori* d'autant plus facilement que les coefficients extraits $\hat{\beta}_{ki}$, $i \in [1, N]$, seront groupés. Nous devons, pour nous en persuader, anticiper légèrement sur la suite. Cette étape a en effet recours à l'interpolation, qui sera en général d'autant plus aisée que la plage de variation de la fonction à interpoler est faible. Il ne s'agit évidemment pas d'une règle absolue et le lecteur incrédule pourra toujours trouver un contre-exemple à y opposer. Cette affirmation se vérifie néanmoins dans de nombreux cas pratiques. La dispersion des coefficients d'un modèle de complexité p est mesurée sur Ψ à l'aide des estimateurs σ_{moy} et σ_{max} définis ci-après :

$$\bar{\beta}_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_{ki} \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_{ki} - \bar{\beta}_k)^2} \quad (2.31)$$

$$\sigma_{moy} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^p \frac{\sigma_k}{\beta_k} \quad \sigma_{max} = \max_{k \in [1,p]} \left(\frac{\sigma_k}{\beta_k} \right) \quad (2.32)$$

La Figure 7 qui en découle est très intéressante car elle montre qu'il n'y a pas de diminution de la dispersion normalisée sur les coefficients avec le nombre de réponses. Nous n'avons donc pas à espérer une simplification de la représentation géométrique lorsque le nombre de réponses augmente. En d'autres termes, il est important de prendre le modèle le plus simple possible et nous retenons $p = 6$. Notons enfin que pour $p = 6$, c'est le modèle **Rationnelle 2** qui est le moins dispersé ce qui devrait le rendre, d'après les remarques précédentes, plus simple à lier à la géométrie.

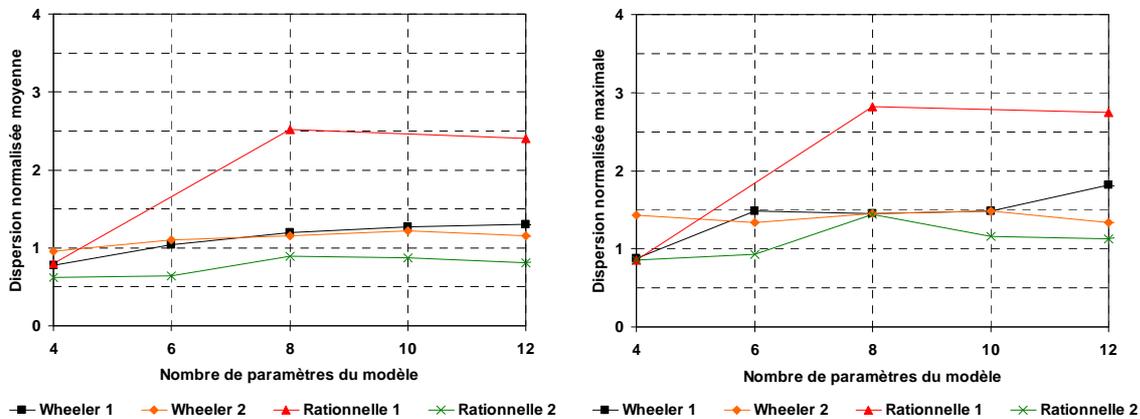


Figure 7 : Influence de la projection sur la dispersion normalisée moyenne et maximale des réponses extraites.

Nous concluons que la base de Wheeler constitue un bon candidat à la représentation de l'impédance $Z(f)$. En particulier, le modèle **Wheeler 2** donne d'excellents résultats lorsque $p = 6$, et nous retiendrons cette représentation ($p_R = 3$, $p_L = 2$) par la suite. Les différences entre les modèles sont apparues bien ténues et nous faisons ici prévaloir le critère de la précision. Il est important de noter à ce stade que notre démarche se veut plus inclusive qu'exclusive, et qu'il ne s'agit évidemment pas d'écarter définitivement l'interpolation par une fonction de transfert. De nombreux travaux ont eu recours avec succès à ce type de représentation, dont le principal avantage reste la très grande diversité comportementale qu'il autorise.

2.4.3. Sensibilité de l'extraction

Nous ne nous sommes intéressés, pour le moment, qu'à la détermination de l'estimateur $\hat{\beta}$ qui permet de minimiser le critère quadratique χ^2 sans nous soucier de la qualité de cette estimation. Nous avons, au point précédent, associé aux simulations une erreur expérimentale

fictive, ce dans le but de corrélérer la complexité du modèle à l'incertitude expérimentale. Nous allons pousser plus loin l'analyse et tenter de calculer, pour chacun des paramètres extraits $\hat{\beta}_k$, un intervalle de confiance $\Delta\hat{\beta}_k$, $k \in [1, p]$. Il nous sera ainsi possible de juger plus objectivement de la pertinence d'un paramètre, c'est-à-dire de la nécessité de l'intégrer au modèle. Celui-ci comporte désormais deux parties. La première composante ($\hat{\beta}$) est déterministe, elle prévoit la valeur moyenne de l'estimateur. La seconde ($\Delta\hat{\beta}$) mesure l'effet des innombrables perturbations susceptibles de disperser $\hat{\beta}$. Cette approche probabiliste de la régression, que l'on peut comparer à une analyse de sensibilité, peut sembler quelque peu artificielle dans le cas de simulations numériques, mais elle s'avère riche en enseignements comme nous allons le vérifier.

2.4.3.1 Intervalle de confiance

Considérons une extraction réalisée à partir de n points expérimentaux (f_i, Z_i) , $i \in [1, n]$. Ces données ont par essence une composante aléatoire et confèrent au vecteur $\hat{\beta}$ un caractère également aléatoire. L'intervalle de confiance $\Delta\hat{\beta}$ sur l'estimation de $\hat{\beta}$ peut être défini comme une région de l'espace des paramètres qui contient une proportion $\alpha \in [0, 1]$ de la distribution de probabilité de $\hat{\beta}$, ce que l'on peut traduire en ces termes : il y a une probabilité α pour que la valeur vraie β des paramètres d'ajustement vérifie :

$$\hat{\beta} - \Delta\hat{\beta} \leq \beta \leq \hat{\beta} + \Delta\hat{\beta} \quad (2.33)$$

Une estimation sera donc d'autant plus précise que cette région sera petite. Lorsque les erreurs ε sont aléatoires, indépendantes, et suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance constante σ^2 connue, le critère quadratique χ^2 est un estimateur de maximum de vraisemblance des paramètres d'ajustement β . On démontre que l'intervalle de confiance $\Delta\hat{\beta}$ suit une loi de probabilité normale multidimensionnelle [20] :

$$P(\Delta\hat{\beta}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det(Co)}} \cdot e^{-\frac{\Delta\hat{\beta}^T \cdot Co^{-1} \cdot \Delta\hat{\beta}}{2}} \quad (2.34)$$

La matrice $[Co]$ est appelée matrice de covariance, elle contient les moments d'ordre deux de la distribution P . Au terme diagonal $[Co]_{kk}$, où $k \in [1, p]$, correspond la variance du paramètre $\hat{\beta}_k$. C'est une mesure de la variabilité statistique de $\hat{\beta}_k$ et donc de l'incertitude sur l'estimation de ce paramètre. Le terme non diagonal $[Co]_{kl}$, où $(k, l) \in [1, p]^2$ et $k \neq l$, donne la covariance des paramètres $\hat{\beta}_k$ et $\hat{\beta}_l$. Cette grandeur caractérise la corrélation entre les estimations de ces

paramètres : une erreur sur l'estimation de $\hat{\beta}_k$ implique alors une erreur sur l'estimation $\hat{\beta}_l$ et réciproquement. La matrice de covariance est donnée par la formule [21] :

$$C_o = \sigma^2 \cdot (X^T X)^{-1} = \sigma^2 \cdot C^{-1} \quad (2.35)$$

L'expression ci-dessus n'implique que la variance expérimentale σ^2 et la matrice d'expériences X . La matrice de covariance est donc intimement liée au modèle retenu et par là même à la variable explicative f . On pressent ici que des points expérimentaux judicieusement choisis doivent permettre, pour une variance expérimentale donnée, de minimiser les termes de la matrice de covariance et donc d'améliorer la qualité de l'estimation. On voit d'autre part de nouveau apparaître la matrice $C = X^T X$ introduite en (2.8), annonciatrice de problèmes numériques. Une fois de plus, la décomposition en valeurs singulières nous sort de ce mauvais pas. On peut en effet écrire que :

$$C_o = \sigma^2 \cdot V(S^*)^2 V^T \quad (2.36)$$

Il existe, pour un niveau de confiance α donné, une relation de proportionnalité entre l'intervalle de confiance $\Delta\hat{\beta}_k$ et la déviation standard d'un coefficient $\hat{\beta}_k$:

$$\Delta\hat{\beta}_k(\alpha) = u_\alpha \cdot \sigma_k \quad \text{avec :} \quad (2.37)$$

$$\sigma_k = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_k)} = ([C_o]_{kk})^{1/2} \quad k \in [1, p] \quad (2.38)$$

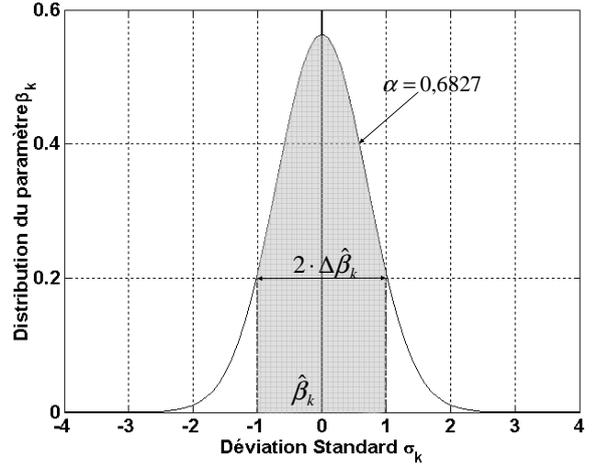
$$\sigma_k = \sigma \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^p (S_{ii}^* V_{ki})^2} \quad (2.38)$$

Le coefficient de proportionnalité u_α est appelé fractile d'ordre α de la distribution normale. Il vérifie la relation suivante, où erf^{-1} est la réciproque de la fonction Erreur [22]. Le Tableau 5 donne l'intervalle d'incertitude pour quelques niveaux de confiance couramment employés.

$$u_\alpha = \sqrt{2} \cdot \text{erf}^{-1}(\alpha) \quad \text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (2.39)$$

α	$\Delta\hat{\beta}_k(\alpha)$
0,3829	$\sigma_k / 2$
0,6827	σ_k
0,9545	$2\sigma_k$
0,9973	$3\sigma_k$

Tableau 5 : Corrélation entre l'intervalle de confiance et le niveau de confiance



Le chapitre 1 démontre, entre autres, que l'incertitude expérimentale est en toute rigueur fonction de la fréquence et de l'inductance considérée. Son estimation rigoureuse nécessite une modélisation complète du banc de mesures ce qui, nous l'avons dit, dépasse le cadre de cette thèse. Nous avons néanmoins déterminé (*cf.* Tableau 2) une incertitude expérimentale relative moyenne, c'est-à-dire correspondant à une mesure typique. Cette valeur, notée ici $E_{typique}$, nous permet d'approcher la déviation standard par :

$$\sigma = E_{typique} \cdot \bar{z} \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2.40)$$

Sous cette approximation, nous obtenons finalement en (2.41) l'expression de l'intervalle de confiance $\Delta\hat{\beta}_k(\alpha)$, attaché au paramètre $\hat{\beta}_k$, en fonction de l'incertitude relative moyenne ($E_{typique}$) sur la réponse. Ces deux grandeurs sont liées par une loi de proportionnalité dont le coefficient $\xi_k(\alpha)$ fait apparaître deux composantes. La première partie (1) ne dépend que de la loi de distribution de la variabilité naturelle, et la seconde (2) dérive de la matrice d'expériences X et donc de la modélisation retenue. Ainsi, l'intuition évoquée page précédente se vérifie ici. Elle sera de la première importance lors de la synthèse de modèles paramétrés.

$$\Delta\hat{\beta}_k(\alpha) = \underbrace{\xi_k(\alpha)}_{(1)} \cdot E_{typique} \quad \xi_k(\alpha) = \underbrace{u_\alpha}_{(1)} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^p (S_{ii}^* V_{ki})^2}}_{(2)} \cdot \bar{z} \quad (2.41)$$

On définit $T_k(\alpha)$ comme le rapport du coefficient (signal) à l'intervalle d'incertitude (bruit), calculé pour un niveau de confiance α . Ce quotient est très intéressant car il constitue un critère de comparaison de la qualité de la détermination des différents paramètres. L'estimation est d'autant plus précise que l'intervalle de confiance $\Delta\hat{\beta}_k(\alpha)$ est faible devant $\hat{\beta}_k$ et donc que le rapport $T_k(\alpha)$ est élevé.

$$T_k(\alpha) = \frac{|\hat{\beta}_k|}{\Delta \hat{\beta}_k(\alpha)} \quad (2.42)$$

Nous avons montré au point précédent qu'une représentation correcte au sens de l'erreur expérimentale était possible à l'aide du modèle **Wheeler 2** comportant six réponses, ce qui implique $p_R = 3$ et $p_L = 2$. Les résultats de l'extraction pour les inductances L_3 et L_4 (respectivement définies aux paragraphes 2.3.1.2 et 2.3.2.3) sont reportés dans le Tableau 6. On peut d'ores et déjà noter que l'approximation de la résistance et de l'inductance équivalente est très bonne avec une erreur moyenne d'environ 1 % sur la résistance et 0,1 % sur l'inductance. On remarque ainsi que ces erreurs sont inférieures à l'erreur expérimentale que nous avons évaluée au chapitre 1.

Erreur	Résistance équivalente		Inductance équivalente	
	L_3	L_4	L_3	L_4
moyenne (%)	0,49	0,13	$1,37 \cdot 10^{-2}$	$6,87 \cdot 10^{-2}$
maximale (%)	4,73	0,64	$6,37 \cdot 10^{-2}$	$2,77 \cdot 10^{-1}$

Tableau 6 : Erreurs de modélisation dans le cas du modèle Wheeler 2.

Le Tableau 7 donne, pour chaque inductance, le coefficient T_k au niveau de confiance $\alpha = 0,95$ et ce, afin d'apprécier la sensibilité de l'extraction relativement à l'incertitude expérimentale. L'incertitude dans l'estimation des paramètres n'est pas négligeable et dépend de la géométrie de l'inductance. Ainsi, pour l'inductance de largeur $10 \mu\text{m}$ (L_4), l'incertitude sur la détermination du coefficient R_1 est très grande. Il en est de même pour l'inductance de largeur $100 \mu\text{m}$ (L_3) concernant la détermination du coefficient R_2 . Ceci s'explique facilement d'après ce que l'on a vu précédemment, le coefficient R_1 étant associé à l'effet de peau unidimensionnel et le coefficient R_2 étant associé à l'effet de peau bidimensionnel.

Résistance équivalente				Inductance équivalente			
Fonction	Coefficient	L_3	L_4	Fonction	Coefficient	L_3	L_4
$f^{1/2}$	R_1	6,60	0,06	1	L_0	245	240
f	R_2	1,53	3,08	$f^{-1/2}$	L_1	1,12	6,66
$f^{3/2}$	R_3	1,29	1,45	f^{-1}	L_2	1,16	3,82

Tableau 7 : Coefficients T associés aux paramètres des modèles Wheeler 2 extraits.

Bien que l'équivalence n'existe sans doute pas au sens des mathématiques, il est néanmoins possible de relier qualitativement la sensibilité du modèle expérimental à ses paramètres et l'incertitude (fictive ou réelle) sur l'estimation de ces derniers. Supposons un paramètre β_k , $k \in [1, p]$, dont la détermination $\hat{\beta}_k$ est de mauvaise qualité, c'est-à-dire telle que le coefficient $T_k(\alpha)$ associé soit faible. Cela signifie que de légères variations sur les points expérimentaux (f_i, Z_i) , $i \in [1, n]$, se traduisent par une forte variation sur le paramètre $\hat{\beta}_k$ estimé. *A contrario*, il est nécessaire de faire varier le paramètre $\hat{\beta}_k$ en de larges proportions pour observer une modification significative de la réponse du modèle expérimental. On montre donc ici que le modèle expérimental est d'autant moins sensible à un paramètre β_k que l'intervalle de confiance $\Delta\hat{\beta}_k$ est large. Cette remarque, si elle paraît pour l'instant anodine, sera par la suite lourde de conséquences.

2.4.3.2 Affinage du modèle

La variabilité naturelle fausse la détermination des coefficients β_k , $k \in [1, p]$, des fonctions du modèle **Wheeler 2**, et peut conduire notamment à justifier une variation de la réponse qui n'est due qu'au hasard. Nous avons ainsi montré que la fonction \sqrt{f} participe peu à l'explication de la résistance dans le cas de l'inductance **L₄**. Et l'on peut en conséquence se demander si cette fonction ne pourrait pas tout simplement être écartée de la modélisation. En d'autres termes, peut-on considérer que le coefficient associé R_1 soit nul ? Il est possible de tester cette hypothèse en calculant sa probabilité d'occurrence. La probabilité pour qu'un coefficient β_k soit nul est en effet donnée par :

$$P(\beta_k = 0) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{t_k}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{où} \quad t_k = \frac{|\hat{\beta}_k|}{\sigma_k} \quad (2.43)$$

Cette expression est valable à la condition que le coefficient t_k suive une loi de probabilité normale, ce qui implicitement signifie que l'on suppose connue la déviation standard σ . Lorsque cette dernière n'est qu'estimée, les expressions se compliquent considérablement puisque le coefficient t_k suit alors une loi de Student [23] et la probabilité P est directement liée à la fonction Bêta incomplète normalisée [24]. Cependant, lorsque le nombre N_e d'échantillons utilisés pour estimer la variance dépasse 60, ce qui est notre cas ($N_e = 100$), l'approximation par une loi normale est tout à fait justifiée.

Le Tableau 8 donne, pour les inductances **L₃** et **L₄**, les probabilités de nullité associées aux différents paramètres extraits. On vérifie ce que l'on pressentait précédemment en ce qui concerne l'inductance **L₄** : le coefficient R_1 a une probabilité non négligeable d'être nul.

Résistance équivalente			Inductance équivalente		
Coefficient	L_3	L_4	Coefficient	L_3	L_4
R_1	0	91	L_0	0	0
R_2	0,27	$1,53 \cdot 10^{-7}$	L_1	2,77	0
R_3	1,17	0,46	L_2	2,34	$7,42 \cdot 10^{-12}$

Tableau 8 : Probabilité de nullité des coefficients extraits (%).

On met alors en place la procédure d'affinage suivante. Un modèle préliminaire est tout d'abord extrait. Ce modèle comporte *a priori* suffisamment de réponses pour représenter correctement les divers comportements observés. La probabilité de nullité P de chaque coefficient est ensuite calculée. Une fonction sera écartée du modèle lorsque la probabilité de nullité du coefficient associé est supérieure à un certain seuil, que l'on appelle seuil de risque. Il représente le risque (dit de première espèce) de refuser l'hypothèse $\beta_k = 0$ alors que celle-ci est vraie. Si plusieurs fonctions sont susceptibles d'être évincées, seule la fonction ayant la plus forte probabilité d'exclusion est effectivement écartée. En effet, les coefficients étant en général corrélés, une éviction influe sur la probabilité d'exclusion des fonctions restantes. Le test doit donc être répété après chaque exclusion et l'algorithme obtenu est de ce fait itératif. En appliquant cette procédure à l'inductance L_4 , avec un seuil de risque égal à 0,05, on obtient finalement le modèle suivant :

$$R_{reg}(f) = 1,51 + 2,18 \times f_r - 0,69 \times f_r^{3/2} \quad (2.44)$$

$$L_{reg}(f) = 2,19 \cdot 10^{-9} + \frac{5,45 \cdot 10^{-11}}{f_r^{1/2}} - \frac{5,30 \cdot 10^{-12}}{f_r} \quad (2.45)$$

Ce modèle est à comparer au modèle donné en (2.28) et (2.29). En particulier on pourra remarquer que le nombre de réponses nécessaires à la modélisation est passé de dix à six, alors que l'erreur maximale n'est que de l'ordre de 0,5 % sur la résistance et de 0,3 % sur l'inductance.

On a appliqué la procédure d'affinage à l'ensemble Ψ d'inductances que nous avons défini au paragraphe (2.4.1). Les résultats sont synthétisés Figure 8 et Figure 9. Ainsi, qu'il s'agisse de l'inductance ou de la résistance, il peut être noté que les modèles affinés donnent, en comparaison à l'erreur expérimentale, des résultats tout à fait équivalents aux modèles bruts tout en impliquant un

nombre de réponses moins grand. Cet affinage est important du point de vue de l'interprétation physique car il permet d'éliminer certains effets non significatifs.

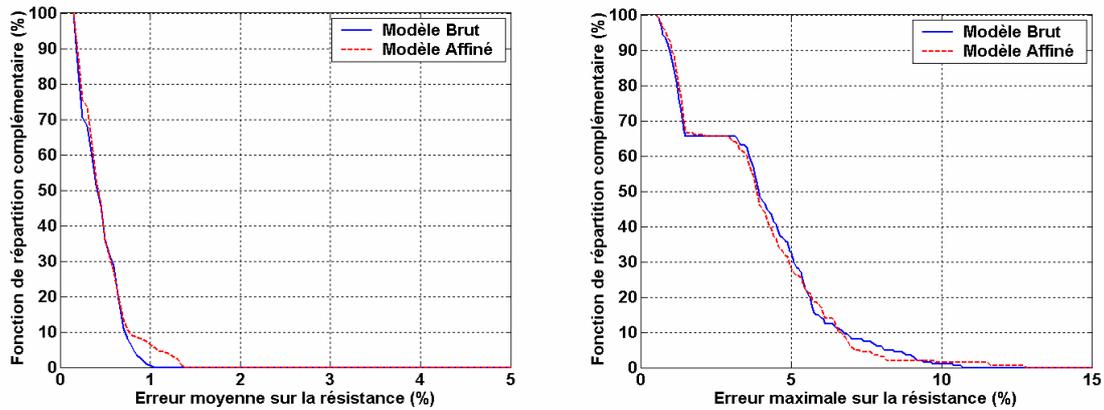


Figure 8 : Analyse statistique de l'erreur introduite par l'affinage sur la résistance R .

En effet, si notre base de projection a été établie à l'aide de considérations physiques, elle n'est évidemment pas parfaite. Il a par exemple été démontré [25] que l'effet de peau et l'effet de proximité sont orthogonaux, c'est-à-dire que leurs contributions à la résistance peuvent se sommer, lorsque l'intensité du champ magnétique dû aux autres conducteurs est constante sur la section du conducteur considéré. On peut cependant légitimement se demander si cette propriété est toujours vérifiée dans le cas général. A l'inverse, nous sommes sûrs que l'effet de peau 1D et l'effet de peau 2D ne peuvent être sommés. En effet, bien que correspondant physiquement à un seul et même phénomène, ils s'excluent mutuellement d'un point de vue descriptif. On observe l'un ou l'autre, mais pas les deux simultanément.

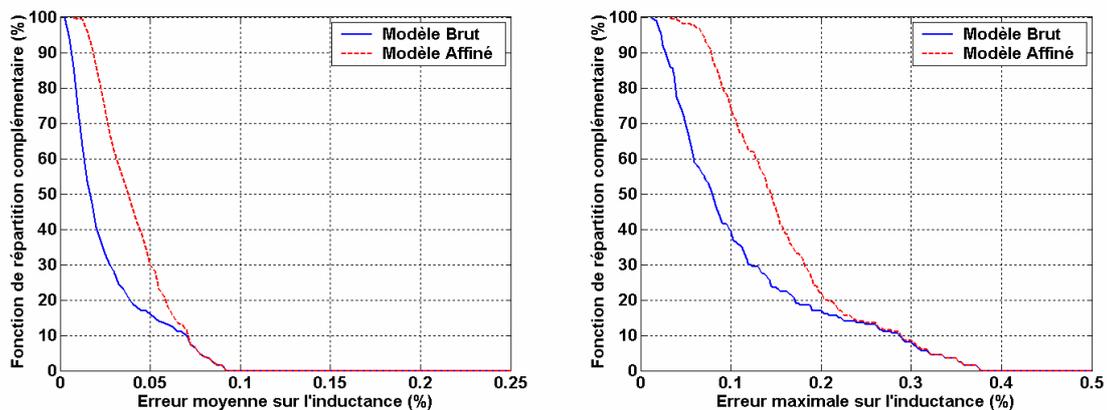


Figure 9 : Analyse statistique de l'erreur introduite par l'affinage sur l'inductance L .

On voit ici les limitations d'un modèle linéaire, qui suppose implicitement des effets concomitants et sommables. L'une des conséquences est l'apparition dans le modèle de termes négatifs, artefacts résultant de compensations numériques. L'affinage permet d'éliminer certains

termes négatifs, non significatifs par rapport à l'incertitude expérimentale fictive ou effective. Quelques uns subsistent malheureusement, comme le soulignent les formules (2.44) et (2.45). Notre salut pourrait venir de l'utilisation de l'algorithme NNLS ("Non Negative Least Square") [26] qui, comme son nom l'indique, permet la résolution d'un système linéaire d'équations au sens des moindres carrés, sous la contrainte que la solution ne comporte pas d'élément négatif. Cette méthode d'extraction est appliquée au modèle **Wheeler 2**, en reprenant le protocole d'étude introduit au paragraphe 2.4.1. Les résultats obtenus sont consignés Figure 10.

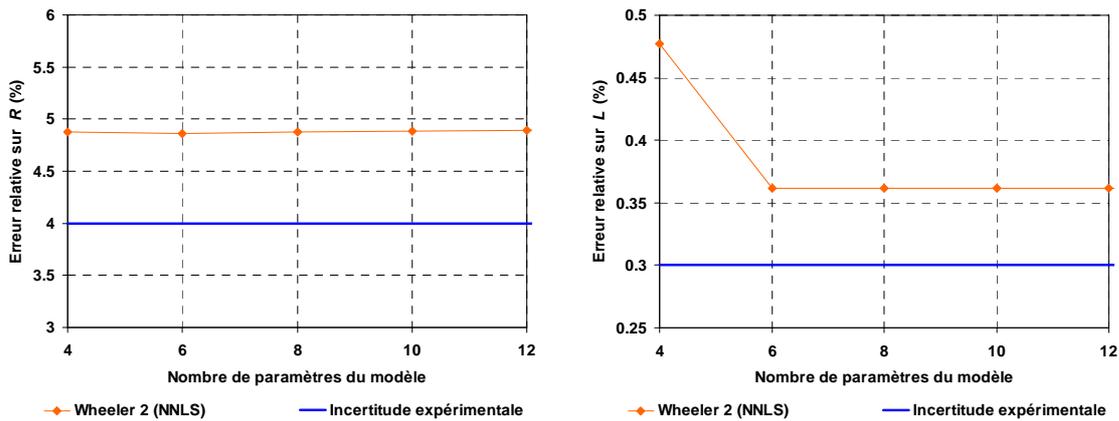


Figure 10 : Influence du nombre de paramètres sur l'erreur relative maximale commise sur la résistance R et l'inductance L .

La moyenne des erreurs relatives maximales, pour l'ensemble Ψ , observée sur la résistance (E_R^{\max}) et l'inductance (E_L^{\max}) est supérieure à l'incertitude expérimentale, quel que soit le nombre de paramètres impliqués. Nous pouvons donc en déduire qu'il est impossible de représenter correctement ces deux grandeurs à l'aide du modèle **Wheeler 2** à coefficients exclusivement positifs. Nous démontrons ainsi que l'origine du problème se trouve dans la structure même de la base de Wheeler. Il faut se résigner ici à conclure que les coefficients négatifs sont inévitables et qu'en conséquence, seuls les termes prépondérants ont de manière certaine une signification physique. Faut-il pour autant abandonner la base de Wheeler ? Non bien entendu, cette dernière allant se révéler être particulièrement performante lors de la génération de modèles paramétrés, l'objet de la prochaine partie.

3. Génération d'un modèle paramétré

Nous avons présenté une méthode générale de modélisation expérimentale. Elle a nécessité l'introduction de concepts mathématiques sophistiqués qui ne doivent néanmoins pas en cacher la finalité, synthétisée par la relation (3.1) : une représentation efficace (R_{reg}, L_{reg}) de la réponse électrique (R, L) d'une inductance. L'impédance équivalente est approchée à l'aide d'un petit

nombre de fonctions dont la forme tente de reproduire au mieux les divers comportements observés.

$$\begin{aligned} Z(f) &= R(f) + j\omega \cdot L(f) \\ Z(f) &\approx R_{reg}(f; R_0, \dots, R_{p_R}) + j\omega \cdot L_{reg}(f; L_0, L_1, \dots, L_{p_L}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

La description qui en résulte n'implique que quelques variables qui dépendent évidemment de la géométrie de l'inductance. Malgré tous les efforts que nous avons dus fournir pour l'obtenir, elle ne constitue qu'un intermédiaire vers l'obtention d'un modèle paramétré. Il nous faut en effet encore établir une relation analytique entre les paramètres électriques et les paramètres géométriques :

$$\begin{cases} R_i = f_i(W, S, R_{int}, N_t, S_g) \\ L_j = g_j(W, S, R_{int}, N_t, S_g) \end{cases} \quad \forall i \in [0, p_R] \text{ et } j \in [0, p_L] \quad (3.2)$$

Ainsi, les paramètres du modèle expérimental étant eux-mêmes représentatifs de la caractéristique électrique de l'inductance, nous obtenons *ipso facto* un modèle géométrique, par transitivité. On rappelle une fois de plus que W est la largeur des pistes, que S est l'espacement inter-spires, R_{int} le rayon interne, N_t le nombre de tours, et enfin S_g l'espacement au plan de masse. Il est illusoire d'espérer déterminer des lois de variation comportementales pour un tel nombre de paramètres sans une méthode systématique, et nous avons ici recours à une puissante technique d'analyse : la méthodologie des surfaces de réponse.

3.1. Modèle polynomial

Il est important avant toute chose de déterminer l'ensemble sur lequel nous travaillons. Nous avons $p_\Gamma = 5$ variables explicatives que nous regroupons sous la forme d'un vecteur $\Gamma = [W, S, R_{int}, N_t, S_g]$. Nous avons également $p_R + p_L + 1$ réponses $Y \in \{R_1, \dots, R_{p_R}; L_0, \dots, L_{p_L}\}$. La réponse $R_0 \equiv R_{dc}$ a d'ores et déjà été exprimée en fonction de Γ au chapitre 2 (cf. § 5.1), elle est de ce fait exclue de l'étude. Ainsi, les observations, qui correspondent dans notre cas à N résultats de simulation, peuvent s'exprimer sous la forme de couples (Γ_i, Y_i) , $i \in [1, N]$. La procédure d'extraction, détaillée au paragraphe 2.3, est parfaitement applicable à une mesure expérimentale et nous retiendrons en conséquence, afin de qualifier les couples (Γ_i, Y_i) , le terme "expérience" qui devra être compris dans son acception la plus générale.

Le modèle retenu afin d'interpoler l'ensemble des expériences est polynomial. L'idée de base présidant à ce choix étant qu'au voisinage d'un point toute fonction peut être développée en

série de Taylor et donc remplacée par un polynôme. Celui-ci dépendant de plusieurs variables, le terme "surface de réponse" est également souvent utilisé. La complexité du modèle est liée à l'ordre p du polynôme P et à la prise en compte ou non des interactions.

$$Y_{geo}(\Gamma_i) = P_p(\Gamma_i) = Y_i + \varepsilon_i \quad (3.3)$$

$$P_p(\Gamma_i) = \gamma_0 + \sum_{j_1=1}^{p_\gamma} \gamma_{j_1} \cdot \Gamma_i(j_1) + \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_2=j_1}}^{p_\gamma} \gamma_{j_1 j_2} \cdot \Gamma_i(j_1) \Gamma_i(j_2) + \dots + \sum_{\substack{j_1=1 \\ \vdots \\ j_p=j_{p-1}}}^{p_\gamma} \gamma_{j_1 \dots j_p} \cdot \Gamma_i(j_1) \dots \Gamma_i(j_p) \quad (3.4)$$

Cette écriture peut être synthétisée sous forme matricielle.

$$X \cdot \gamma = y + \varepsilon \quad (3.5)$$

On retrouve la matrice d'expériences X , le vecteur des coefficients du modèle γ , le vecteur réponse y , et le vecteur résidu ε . En donner l'expression générale serait trop lourd et nous préférons illustrer notre propos par un exemple. Soit un modèle dépendant de deux variables W et S . On a $\Gamma = [W, S]$ et donc $p_\Gamma = 2$. Le modèle retenu est un modèle quadratique ($p = 2$) avec interactions, il a en conséquence l'expression suivante :

$$Y_{geo}(W_i, S_i) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot W_i + \gamma_2 \cdot S_i + \gamma_{11} \cdot W_i^2 + \gamma_{12} \cdot W_i S_i + \gamma_{22} \cdot S_i^2 \quad \text{d'où il vient :} \quad (3.6)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & W_1 & S_1 & W_1^2 & W_1 S_1 & S_1^2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N & S_N & W_N^2 & W_N S_N & S_N^2 \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2. Les plans d'expériences

La théorie des plans d'expériences est à l'expérimentation ce que le taylorisme [27] est à l'organisation du travail. Elle a été développée au début du siècle dans le but de rationaliser la méthode expérimentale, c'est-à-dire d'en accroître l'efficacité. Initialement appliquée à l'agriculture [28], cette science de l'expérience s'est naturellement étendue à des domaines aussi divers que la médecine [29], la mécanique [30], et la microélectronique [31,32]... En outre, bien que faisant appel à des outils statistiques très élaborés, la théorie des plans d'expériences n'en reste pas moins très appliquée, ses motivations étant principalement d'ordre économique.

3.2.1. Choix du type de plan

Un plan d'expériences peut être défini comme la liste Γ_i , $i \in [1, N]$, des combinaisons de niveaux de facteurs, pour lesquelles la réponse Y doit être observée. Le but des plans d'expériences est de déterminer, dans un nombre minimum d'essais, les valeurs prédites des coefficients du modèle Y_{geo} aussi proches que possible des valeurs vraies, de détecter facilement le manque d'adéquation du modèle, et de présenter une certaine insensibilité à la non normalité éventuelle de l'erreur expérimentale [33]. Il est important de remarquer qu'un plan d'expériences est spécifiquement conçu pour le modèle qu'il renseigne. Un plan factoriel complet à deux niveaux permet par exemple l'identification d'un modèle linéaire avec interactions. Un plan composite centré ou encore un plan de Box-Behnken n'est applicable que dans le cas de modèles quadratiques. Si l'on excepte les plans de Koshal [34], qui malheureusement ne remplissent aucune condition d'optimalité, il n'existe aucun plan classique dès lors que l'ordre du modèle polynomial est supérieur à deux. La seule alternative reste alors les plans algorithmiques.

Notre objectif est ici de déterminer un ensemble de N simulations nous permettant d'identifier les paramètres du modèle polynomial P_p . L'équation (2.35) met clairement en évidence que si l'incertitude sur l'estimation est évidemment imputable à l'incertitude expérimentale, elle est également intimement liée au protocole expérimental mathématiquement représenté par la matrice d'expériences X . On démontre ainsi que la région de confiance sur la détermination des coefficients du modèle est un ellipsoïde dont les axes principaux sont proportionnels au carré des valeurs propres de la matrice de covariance $Co = \sigma^2(X^T.X)^{-1}$. Par conséquent, pour accroître la précision de la prédiction de réponse, il faut réduire le volume de l'ellipsoïde de confiance, donc réduire les valeurs des axes principaux et par suite minimiser les valeurs propres. Il existe plusieurs critères permettant d'atteindre cet objectif et l'on peut citer le critère d'optimalité A qui consiste à optimiser la trace de la matrice covariance, ou encore le critère D qui consiste à optimiser son déterminant.

3.2.2. Algorithmes de construction du plan

Une expérience Γ_i peut être définie comme un point de l'espace des facteurs de dimension p_Γ . Il s'agit ici de trouver le minimum du déterminant de Co – c'est-à-dire le maximum du déterminant de X – dans l'espace des plans possibles, de dimension $N \times p_\Gamma$. C'est un problème très compliqué car les facteurs d'une manière générale peuvent varier de façon continue. Il est possible de réduire la complexité du problème en limitant l'espace des facteurs à un ensemble discret d'expériences. La génération du plan d'expériences D -optimal [35] est réalisée à l'aide de deux algorithmes distincts qui vont automatiquement choisir, parmi cet ensemble d'expériences candidates, les plus pertinentes pour l'identification du modèle polynomial P_p .

3.2.2.1 Algorithme de Galil-Kiefer

Soit $x(\Gamma)$ le vecteur des termes du modèle, de dimension p_γ , contenant l'ensemble des combinaisons des éléments du vecteur des facteurs Γ impliquées dans le modèle $P_p(\Gamma)$. Si l'on reprend l'exemple présenté en (3.6), $x(\Gamma) = [1, W, S, W^2, WS, S^2]$. L'algorithme de Galil-Kiefer [36] génère un plan d'expériences minimal. Il construit la matrice initiale de dimensions $p_\gamma \times p_\gamma$ de manière itérative en ajoutant à chaque itération le point de l'ensemble des candidats qui permet de maximiser le déterminant. Une fois que la matrice X comprend p_γ expériences, l'ensemble de points choisi est alors capable de déterminer le modèle. Nous pouvons calculer en conséquence la matrice covariance Co du plan et en déduire, d'après l'équation (3.8), une variance de prédiction $\nu(\Gamma)$ pour chaque point candidat Γ .

$$\begin{aligned} \nu(\Gamma) &= x^T(\Gamma) \cdot Co \cdot x(\Gamma) \\ \nu(\Gamma) &= \underbrace{\sigma^2}_{(1)} \cdot \underbrace{x^T(\Gamma) \cdot [X^T X]^{-1} \cdot x(\Gamma)}_{(2)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sont finalement ajoutés au plan d'expériences les $N-p_\gamma$ points de l'ensemble des candidats ayant la variance la plus élevée. Ces points sont désirables car en les incluant, on diminue la variance de prédiction dans leur voisinage c'est-à-dire, l'incertitude locale sur les résultats du modèle paramétré P_p . La variance de prédiction $\nu(\Gamma)$ est, en effet, le produit de deux contributions : une contribution que l'on pourrait qualifier de naturelle (1) traduisant l'effet de la variabilité expérimentale σ et une contribution structurelle (2) révélant l'influence du plan d'expériences. On peut donc interpréter la variance $\nu(\Gamma)$ comme la sensibilité de la prédictibilité du modèle P_p au plan, au point d'expérience Γ , et pour une variabilité naturelle σ donnée. Cette propriété est mise à profit par l'algorithme de Johnson-Nachtsheim [37], qui permet d'augmenter et d'affiner le plan d'expériences.

3.2.2.2 Algorithme de Johnson-Nachtsheim

L'algorithme de Johnson-Nachtsheim est également itératif et détermine à chaque itération les k points, $k \in [1, p_\gamma]$, dans le plan d'expériences qui ont la variance de prédiction ν la plus faible, qui sont en quelque sorte les moins informatifs. L'algorithme considère alors tous les échanges possibles entre ces points et l'ensemble des candidats. Si l'un de ces échanges permet d'augmenter le déterminant, il est retenu. Cette procédure est appliquée tant que les variations relatives du déterminant sont significatives c'est-à-dire supérieures à un certain seuil η . Le nombre maximum d'itérations (n_{max}) est fini, ce qui offre une condition d'arrêt s'il y a divergence des résultats. Nous avons retenu pour cet algorithme la configuration suivante : $k = 3$, $\eta = 10^{-3}$ et $n_{max} = 100$.

3.2.3. Considérations statistiques

La variance de prédiction $v(\Gamma)$ du modèle P_p en un point d'expérience Γ est calculée en supposant que les résidus ε sont statistiquement indépendants et suivent une distribution normale de variance constante σ . Considérons un ensemble de réponses Y , résultat d'une extraction réalisée sur une mesure expérimentale. L'incertitude sur la détermination des réponses Y varie d'un point d'expérience Γ à l'autre. Nous avons, si ce n'est démontré cette assertion, du moins rassemblé un faisceau d'indices en ce sens au paragraphe 2.4.3.1. L'hypothèse de la variance constante est donc mise à mal et l'on peut s'interroger sur la pertinence de la variance de prédiction produite. Bien qu'approximative dans ce cas précis, cette hypothèse reste la seule alternative possible. On ne peut, en effet, déterminer *a priori* la variance d'une expérience sans la réaliser. L'algorithme peut de toute manière être employé, le seul critère de sélection d'une expérience candidate étant l'augmentation du déterminant de la matrice d'expériences. Toutefois, son efficacité s'en trouve sans doute affectée.

Le vecteur résidu ε est justifié, d'une part, par le défaut de modélisation, c'est-à-dire l'incapacité du modèle à représenter les observations et d'autre part, par l'incertitude expérimentale associée aux observations. Lorsque les observations sont issues de simulations numériques, la seconde explication se trouve être automatiquement exclue. Il vient que la variance σ , estimée d'après le vecteur résidu, n'a pas d'interprétation physique et l'on peut en conséquence légitimement se demander quel est le sens à donner à la variance de prédiction. Il faut remarquer que les contributions naturelle (1) et structurelle (2) intervenant dans la relation (3.8) sont clairement séparées. Quelle que soit la valeur de σ , $v(\Gamma)$ reste un estimateur de la sensibilité de la prédictibilité du modèle aux expériences du plan. Ainsi, si l'algorithme de Johnson et Nachtsheim devient dans le cas d'un plan d'expériences numérique un peu plus artificiel, la démarche n'en demeure pas moins valide, à notre sens. Il ne peut en effet y avoir de contre-indication à mailler plus finement un domaine de l'espace des expériences où la prédictibilité du modèle est moindre.

4. Application et résultats

4.1. Processus de modélisation

Le processus global de génération du modèle paramétré est rappelé dans le Tableau 9. Il synthétise les grandes phases de la modélisation, que nous avons présentées tout au long de ce chapitre ainsi que dans le chapitre précédent. Ce diagramme synoptique est accompagné d'un exemple illustratif qui, nous l'espérons, permettra de faciliter sa compréhension. Il peut d'ores et

déjà être noté que le plan d'expériences programmé lors de la deuxième étape est numérique. Ainsi, les facteurs Γ sont parfaitement maîtrisables, par essence, ce qui est intéressant lorsque le procédé technologique de fabrication des composants est en développement.

Étape	Description	Exemple					
	Résultat						
1	Définition des paramètres	$\begin{cases} 10 \leq W \leq 100 \mu\text{m} \\ 10 \leq S \leq 50 \mu\text{m} \\ 75 \leq R_{\text{int}} \leq 275 \mu\text{m} \\ 1,5 \leq N_t \leq 4,5 \\ 20 \leq S_g \leq 200 \mu\text{m} \end{cases}$					
	Ensemble d'intervalles						
2	Génération d'un plan de N expériences	Simulation	W	S	R_{int}	S_g	N_t
		Γ_1	10	10	175	50	2,5
		Γ_2	50	50	125	200	3,5
	Arbre de simulations						
		Γ_N	90	40	100	160	3
3	Simulations numériques par la méthode PEEC	$\begin{cases} Z_1(f_i) = R_1(f_i) + jL_1(f_i)\omega \\ Z_2(f_i) = R_2(f_i) + jL_2(f_i)\omega \\ \vdots \\ Z_N(f_i) = R_N(f_i) + jL_N(f_i)\omega \end{cases} \quad i \in [1, n]$					
	Ensemble de modèles discrets n points de fréquence						
4	Extraction d'un modèle expérimental	$\begin{cases} R_1(f) \\ L_1(f) \end{cases} \equiv \begin{cases} R_{11}, R_{12}, R_{13} \\ L_{10}, L_{11}, L_{12} \end{cases}$					
	Ensemble de modèles électriques	$\begin{cases} R_2(f) \\ L_2(f) \end{cases} \equiv \begin{cases} R_{21}, R_{22}, R_{23} \\ L_{20}, L_{21}, L_{22} \end{cases}, \dots$					
5	Analyse du plan d'expériences	$\begin{cases} \vdots \\ R_{11} = 2,61 \cdot 10^{-6} - 2,55 \cdot 10^{-6} \cdot N_t + 1,99 \cdot 10^{-8} \cdot W + \dots \\ L_{11} = 1,93 \cdot 10^{-6} + 6,56 \cdot 10^{-7} \cdot N_t - 2,18 \cdot 10^{-7} \cdot W + \dots \\ \vdots \end{cases}$					
	Modèle géométrique						

Tableau 9 : Diagramme synoptique du processus de modélisation.

Le modèle $P_p(\Gamma)$ que nous avons retenu pour corréler les coefficients du modèle **Wheeler 2** $Y \in \{ R_1, \dots, R_{p_R}; L_0, \dots, L_{p_L} \}$ à la géométrie $\Gamma = [W, S, R_{\text{int}}, N_t, S_g]$, est un modèle cubique ($p = 3$)

avec interactions. Les éléments du vecteur $x(\Gamma)$ définissant le modèle, au nombre de 57, sont détaillés dans le Tableau 10. Il y a, par conséquent, 57 coefficients par réponse à déterminer, ce qui signifie qu'autant de simulations sont nécessaires à l'identification du modèle. On comprend mieux dès lors l'objet des attentions portées, chapitre 3, aux temps de simulation. Ce paramètre, crucial, exclut à cette étape les méthodes numériquement trop lourdes, aussi précises soient-elles.

\times	Modèle quadratique complet						Modèle cubique incomplet					Modèle cubique complet						
	1	W	S	R_{int}	N_t	S_g	W^2	S^2	R_{int}^2	N_t^2	S_g^2	$N_t W$	$N_t S$	$N_t R_{int}$	WS	WR_{int}	SR_{int}	
1	•	•	•	•	•	•												
W		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•							
S			•	•	•	•	•	•	•	•		•						
R_{int}				•	•	•	•	•	•	•		•	•		•			
N_t					•	•	•	•	•	•								
S_g						•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•

Tableau 10 : Ensemble $x(\Gamma)$ des termes du modèle polynomial cubique.

Afin de s'assurer de la prédictibilité de notre modèle, nous considérons un ensemble de simulations plus large comprenant $N = 200$ éléments, soit un nombre de contraintes plus que trois fois supérieur au nombre de degrés de liberté. Les limites du sous-espace des facteurs (noté Ω) sur lequel le modèle géométrique est défini, sont précisées dans le Tableau 11. Les différents pas de discrétisation de Ω y sont également mentionnés. L'ensemble des candidats qui en résulte, noté Ψ , comprend 32400 simulations.

Facteur	W (μm)	S (μm)	R_{int} (μm)	N_t	S_g (μm)
Minimum	10	10	75	1,5	20
Maximum	100	50	275	4,5	200
Pas	10	5	25	1	20

Tableau 11 : Définition des bornes du domaine étudié Ω et de l'ensemble des candidats Ψ .

Les algorithmes de génération d'un plan D-optimal, implémentés dans le logiciel commercial d'analyse de données Cornerstone™ [38], sont appliqués afin de choisir parmi toutes ces simulations celles qui sont les plus informatives vis à vis de notre modèle. Il n'est pas possible de représenter graphiquement, dans sa totalité, le maillage D-Optimal obtenu, tout simplement car l'espace des facteurs est de dimension $p_\Gamma = 5$. Nous devons donc nous contenter des deux vues parcellaires de la Figure 11, qui correspondent aux expériences du plan vérifiant $N_t = 2,5$ et

$S_g = 200 \mu\text{m}$, ou alors $N_t = 4,5$ et $S_g = 200 \mu\text{m}$. Chaque expérience est repérée par un point dans le sous-espace à trois dimensions généré par les paramètres W , S et R_{int} . La ligne verticale issue de chacun de ces points a pour seule fonction de lever l'ambiguïté relative à leur localisation spatiale, ambiguïté qui est inhérente à la représentation tridimensionnelle.

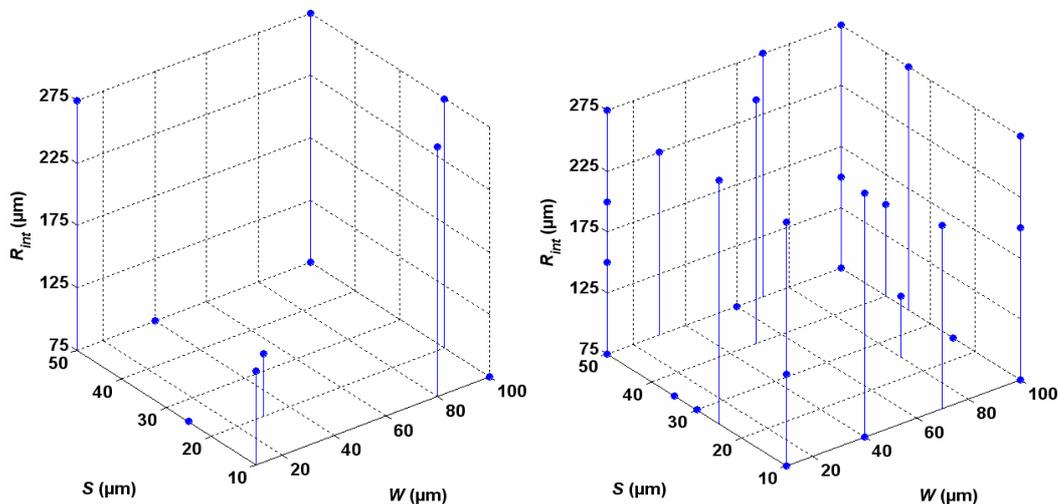


Figure 11 : Représentation des coordonnées (W, S, R_{int}) des expériences du plan D-Optimal, pour $N_t = 2,5$ et $S_g = 200 \mu\text{m}$ (à gauche) ainsi que pour $N_t = 4,5$ et $S_g = 200 \mu\text{m}$ (à droite).

Le maillage obtenu est loin d'être uniforme et l'on perçoit ici toute la complexité des plans d'expériences algorithmiques. Le sous-espace, tel que $N_t = 2,5$ et $S_g = 200 \mu\text{m}$, contient seulement 10 expériences, alors que son homologue, défini par $N_t = 4,5$ et $S_g = 200 \mu\text{m}$, en comporte 27. Ceci traduit une augmentation de la densité d'expériences en bordure de domaine. En effet, toutes les zones de l'espace Ω ne sont pas équivalentes du point de vue de la détermination du modèle. L'algorithme de Johnson-Nachtsheim, par exemple, inclut dans le plan d'expériences les points de l'ensemble des candidats Ψ présentant la plus grande variance de prédiction. La variance de prédiction, en un point d'expérience Γ , traduit l'effet, en ce point, de l'incertitude (fictive ou effective) quant à l'identification des coefficients du modèle. Il est clair que ce dernier sera déterminé en Γ avec d'autant plus de précision, que le nombre de contraintes au voisinage de Γ , directement lié au nombre d'expériences à proximité, est important. Or, la densité d'expériences en un point situé à une extrémité de Ω est, de par la position même de ce point, plus faible que la densité autour d'un point central. Les algorithmes précités compensent, en quelque sorte, cette iniquité topologique, ce qui conduit à mailler plus finement l'espace des facteurs sur ses bords.

4.2. Modèles obtenus

Nous venons de présenter la chaîne de procédures qui nous a permis, à partir d'une mesure ou d'une simulation, de produire un modèle paramétré. Cet édifice s'appuie sur deux piliers : l'extraction de paramètres électriques, basée sur la méthode SVD, et la génération d'un modèle

géométrique, ayant recours à la théorie des plans d'expériences. La présentation des divers concepts aura pu paraître quelque peu rébarbative au lecteur. Notre objectif, ici, était de lui donner toutes les clés lui permettant de produire un tel modèle et de faire clairement apparaître les nombreuses difficultés que nous avons pu rencontrer tout au long du processus de modélisation. Il convient à présent d'évaluer ce modèle, évaluation réalisée en plusieurs étapes. Nous débuterons avec le calcul des erreurs aux points de l'ensemble des candidats pour ensuite vérifier l'aptitude à la prédiction du modèle grâce à des essais de confirmation. L'aptitude à la prédiction se fait en deux phases. On génère tout d'abord un ensemble de simulations aléatoires contenues dans l'espace des candidats afin de calculer, ensuite, l'erreur en ces points qui statistiquement n'appartiennent pas au plan d'expériences initial. Le modèle géométrique est enfin confronté à la mesure.

4.2.1. Comparaison à la simulation

4.2.1.1 Le modèle Wheeler 2

Considérons le modèle **Wheeler 2** tel que $p_R = 3$ et $p_L = 2$, conformément aux conclusions de l'étude précédemment menée. Les erreurs introduites dans ce chapitre au paragraphe 2.4.1, dans le but d'estimer sur l'ensemble du plan la qualité d'une extraction, sont faibles : $E_R^{moy} = 0,44 \%$, $E_R^{max} = 3,83 \%$, $E_L^{moy} = 0,03 \%$, $E_L^{max} = 0,11 \%$. Ainsi, nous en déduisons que chaque jeu de paramètres $\{R_1, R_2, R_3 ; L_0, L_1, L_2\}$ peut être considéré comme un équivalent de la simulation $Z_{num}(f)$ dont il est issu. Ce modèle expérimental donne ensuite naissance au modèle paramétré P_3 qui relie, rappelons-le une fois de plus, les fonctions $\{R_1, R_2, R_3 ; L_0, L_1, L_2\}$ aux variables géométriques $\Gamma = [W, S, R_{int}, N_t, S_g]$.

Le Tableau 12, page suivante, précise chacun des 336 coefficients définissant le modèle géométrique complet. Les variables homogènes à une distance (W, S, R_{int}, S_g) sont exprimées en microns. Si une lecture détaillée de ce tableau est totalement dénuée d'intérêt, un rapide coup d'œil sur celui-ci permettra néanmoins d'apprécier la complexité du modèle produit. On pourra d'ailleurs se remémorer les formules comportementales établies au chapitre 2, à titre de comparaison. Il devient alors évident qu'une représentation fine des caractéristiques électriques d'une inductance est illusoire sans une démarche systématique, dès lors que le nombre de variables descriptives est grand. Le recours à la méthodologie des surfaces de réponses est, en ce sens, pleinement justifié.

Structure		Modèle R_{geo}			Modèle L_{geo}			
	Monômes	R_1 ($\Omega \cdot \text{Hz}^{-0.5}$)	R_2 ($\Omega \cdot \text{Hz}^{-1}$)	R_3 ($\Omega \cdot \text{Hz}^{-1.5}$)	L_0 (H)	L_1 ($\text{H} \cdot \text{Hz}^{0.5}$)	L_2 ($\text{H} \cdot \text{Hz}$)	
Modèle quadratique complet	1	$3,939 \cdot 10^{-6}$	$-3,887 \cdot 10^{-10}$	$4,260 \cdot 10^{-15}$	$-9,714 \cdot 10^{-10}$	$-2,036 \cdot 10^{-6}$	$8,120 \cdot 10^{-3}$	
	W	$1,002 \cdot 10^{-7}$	$3,032 \cdot 10^{-12}$	$-8,193 \cdot 10^{-17}$	$1,563 \cdot 10^{-11}$	$3,287 \cdot 10^{-8}$	$-1,030 \cdot 10^{-5}$	
	S	$2,615 \cdot 10^{-7}$	$-4,760 \cdot 10^{-12}$	$1,583 \cdot 10^{-17}$	$1,048 \cdot 10^{-11}$	$-2,970 \cdot 10^{-8}$	$4,100 \cdot 10^{-4}$	
	R_{int}	$-4,948 \cdot 10^{-8}$	$4,103 \cdot 10^{-12}$	$-2,594 \cdot 10^{-17}$	$-4,242 \cdot 10^{-12}$	$2,543 \cdot 10^{-8}$	$3,790 \cdot 10^{-5}$	
	N_t	$-2,397 \cdot 10^{-6}$	$1,942 \cdot 10^{-10}$	$-2,426 \cdot 10^{-15}$	$1,138 \cdot 10^{-9}$	$3,785 \cdot 10^{-7}$	$-9,520 \cdot 10^{-3}$	
	S_g	$-1,534 \cdot 10^{-7}$	$2,740 \cdot 10^{-12}$	$-1,880 \cdot 10^{-17}$	$5,437 \cdot 10^{-12}$	$8,102 \cdot 10^{-9}$	$-2,630 \cdot 10^{-4}$	
	W^2	$-1,275 \cdot 10^{-8}$	$2,389 \cdot 10^{-13}$	$1,506 \cdot 10^{-19}$	$1,491 \cdot 10^{-13}$	$1,152 \cdot 10^{-9}$	$-2,710 \cdot 10^{-5}$	
	WS	$-4,333 \cdot 10^{-10}$	$-8,082 \cdot 10^{-14}$	$4,956 \cdot 10^{-19}$	$9,288 \cdot 10^{-14}$	$-1,054 \cdot 10^{-10}$	$-3,410 \cdot 10^{-6}$	
	WR_{int}	$2,660 \cdot 10^{-9}$	$-8,915 \cdot 10^{-14}$	$4,805 \cdot 10^{-19}$	$-7,335 \cdot 10^{-14}$	$-6,379 \cdot 10^{-10}$	$7,450 \cdot 10^{-6}$	
	WN_t	$3,003 \cdot 10^{-7}$	$-7,196 \cdot 10^{-12}$	$3,610 \cdot 10^{-17}$	$-1,584 \cdot 10^{-11}$	$-4,379 \cdot 10^{-8}$	$8,190 \cdot 10^{-4}$	
	WS_g	$7,555 \cdot 10^{-10}$	$-1,110 \cdot 10^{-14}$	$5,550 \cdot 10^{-20}$	$-5,365 \cdot 10^{-14}$	$-9,237 \cdot 10^{-11}$	$1,250 \cdot 10^{-6}$	
	S^2	$-1,384 \cdot 10^{-8}$	$4,755 \cdot 10^{-13}$	$-2,148 \cdot 10^{-18}$	$1,247 \cdot 10^{-13}$	$2,907 \cdot 10^{-9}$	$-2,190 \cdot 10^{-5}$	
	SR_{int}	$9,368 \cdot 10^{-10}$	$-2,334 \cdot 10^{-14}$	$5,017 \cdot 10^{-21}$	$3,754 \cdot 10^{-16}$	$-2,456 \cdot 10^{-10}$	$1,620 \cdot 10^{-6}$	
	SN_t	$2,678 \cdot 10^{-8}$	$-3,501 \cdot 10^{-12}$	$2,228 \cdot 10^{-17}$	$-1,596 \cdot 10^{-11}$	$-2,007 \cdot 10^{-8}$	$6,130 \cdot 10^{-5}$	
	SS_g	$1,005 \cdot 10^{-9}$	$-2,531 \cdot 10^{-14}$	$2,408 \cdot 10^{-19}$	$-3,700 \cdot 10^{-14}$	$8,168 \cdot 10^{-11}$	$2,740 \cdot 10^{-6}$	
	R_{int}^2	$2,070 \cdot 10^{-10}$	$-1,908 \cdot 10^{-14}$	$1,372 \cdot 10^{-19}$	$1,547 \cdot 10^{-14}$	$-8,447 \cdot 10^{-11}$	$-8,280 \cdot 10^{-7}$	
	$R_{int}N_t$	$-8,734 \cdot 10^{-9}$	$1,376 \cdot 10^{-12}$	$-7,144 \cdot 10^{-18}$	$2,354 \cdot 10^{-12}$	$1,870 \cdot 10^{-8}$	$-7,850 \cdot 10^{-5}$	
	$R_{int}S_g$	$-4,835 \cdot 10^{-10}$	$-1,228 \cdot 10^{-15}$	$1,980 \cdot 10^{-20}$	$6,749 \cdot 10^{-14}$	$-1,868 \cdot 10^{-10}$	$-3,660 \cdot 10^{-7}$	
N_t^2	$-1,198 \cdot 10^{-6}$	$8,824 \cdot 10^{-12}$	$4,337 \cdot 10^{-16}$	$-3,574 \cdot 10^{-10}$	$3,377 \cdot 10^{-7}$	$-2,660 \cdot 10^{-3}$		
N_tS_g	$-7,194 \cdot 10^{-9}$	$-5,655 \cdot 10^{-13}$	$5,524 \cdot 10^{-18}$	$1,263 \cdot 10^{-12}$	$-1,591 \cdot 10^{-8}$	$-2,880 \cdot 10^{-6}$		
S_g^2	$1,507 \cdot 10^{-9}$	$-8,635 \cdot 10^{-15}$	$2,081 \cdot 10^{-20}$	$-1,048 \cdot 10^{-13}$	$3,101 \cdot 10^{-10}$	$2,060 \cdot 10^{-6}$		
Modèle cubique incomplet	W^3	$1,158 \cdot 10^{-10}$	$-2,619 \cdot 10^{-15}$	$4,639 \cdot 10^{-21}$	$-2,375 \cdot 10^{-15}$	$-1,395 \cdot 10^{-11}$	$2,720 \cdot 10^{-7}$	
	WS^2	$5,414 \cdot 10^{-11}$	$-7,080 \cdot 10^{-16}$	$6,147 \cdot 10^{-21}$	$-4,757 \cdot 10^{-15}$	$1,960 \cdot 10^{-12}$	$4,430 \cdot 10^{-8}$	
	WR_{int}^2	$-4,738 \cdot 10^{-14}$	$8,467 \cdot 10^{-18}$	$-2,283 \cdot 10^{-22}$	$-7,603 \cdot 10^{-17}$	$3,074 \cdot 10^{-14}$	$5,320 \cdot 10^{-10}$	
	WN_t^2	$2,784 \cdot 10^{-8}$	$-3,746 \cdot 10^{-13}$	$1,968 \cdot 10^{-18}$	$4,070 \cdot 10^{-12}$	$-2,370 \cdot 10^{-11}$	$6,830 \cdot 10^{-5}$	
	WS_g^2	$-4,361 \cdot 10^{-13}$	$9,347 \cdot 10^{-18}$	$-2,159 \cdot 10^{-22}$	$1,902 \cdot 10^{-16}$	$2,450 \cdot 10^{-13}$	$4,470 \cdot 10^{-9}$	
	SW^2	$3,255 \cdot 10^{-12}$	$7,843 \cdot 10^{-16}$	$-3,587 \cdot 10^{-21}$	$-1,657 \cdot 10^{-15}$	$2,957 \cdot 10^{-13}$	$2,740 \cdot 10^{-8}$	
	S^3	$6,150 \cdot 10^{-11}$	$-6,233 \cdot 10^{-15}$	$3,092 \cdot 10^{-20}$	$1,377 \cdot 10^{-15}$	$-4,344 \cdot 10^{-11}$	$1,790 \cdot 10^{-7}$	
	SR_{int}^2	$-7,380 \cdot 10^{-13}$	$-5,987 \cdot 10^{-17}$	$8,249 \cdot 10^{-22}$	$-9,263 \cdot 10^{-17}$	$-2,911 \cdot 10^{-13}$	$1,090 \cdot 10^{-10}$	
	SN_t^2	$-1,364 \cdot 10^{-8}$	$-1,979 \cdot 10^{-13}$	$3,741 \cdot 10^{-18}$	$5,175 \cdot 10^{-12}$	$-5,380 \cdot 10^{-9}$	$4,210 \cdot 10^{-6}$	
	SS_g^2	$-2,050 \cdot 10^{-12}$	$9,464 \cdot 10^{-17}$	$-8,419 \cdot 10^{-22}$	$2,638 \cdot 10^{-16}$	$-3,617 \cdot 10^{-13}$	$-9,490 \cdot 10^{-9}$	
	$R_{int}W^2$	$-2,596 \cdot 10^{-11}$	$7,856 \cdot 10^{-16}$	$-3,737 \cdot 10^{-21}$	$1,313 \cdot 10^{-15}$	$5,075 \cdot 10^{-12}$	$-6,940 \cdot 10^{-8}$	
	$R_{int}S^2$	$7,836 \cdot 10^{-12}$	$3,819 \cdot 10^{-16}$	$-2,374 \cdot 10^{-21}$	$7,044 \cdot 10^{-16}$	$3,074 \cdot 10^{-13}$	$8,780 \cdot 10^{-9}$	
	R_{int}^3	$-4,289 \cdot 10^{-13}$	$3,922 \cdot 10^{-17}$	$-2,829 \cdot 10^{-22}$	$-4,134 \cdot 10^{-17}$	$1,936 \cdot 10^{-13}$	$1,110 \cdot 10^{-9}$	
	$R_{int}N_t^2$	$1,508 \cdot 10^{-9}$	$-7,412 \cdot 10^{-15}$	$3,834 \cdot 10^{-20}$	$2,059 \cdot 10^{-12}$	$-3,924 \cdot 10^{-10}$	$6,870 \cdot 10^{-6}$	
	$R_{int}S_g^2$	$1,195 \cdot 10^{-12}$	$5,250 \cdot 10^{-19}$	$-4,393 \cdot 10^{-24}$	$-3,426 \cdot 10^{-16}$	$7,064 \cdot 10^{-13}$	$1,610 \cdot 10^{-9}$	
	N_tW^2	$-2,620 \cdot 10^{-9}$	$6,922 \cdot 10^{-14}$	$-3,119 \cdot 10^{-19}$	$7,053 \cdot 10^{-14}$	$4,735 \cdot 10^{-10}$	$-8,310 \cdot 10^{-6}$	
	N_tS^2	$2,003 \cdot 10^{-9}$	$8,340 \cdot 10^{-14}$	$-6,213 \cdot 10^{-19}$	$3,277 \cdot 10^{-14}$	$9,089 \cdot 10^{-10}$	$-1,560 \cdot 10^{-6}$	
	$N_tR_{int}^2$	$1,185 \cdot 10^{-11}$	$1,237 \cdot 10^{-16}$	$-4,149 \cdot 10^{-23}$	$5,990 \cdot 10^{-15}$	$9,532 \cdot 10^{-13}$	$4,290 \cdot 10^{-8}$	
	N_t^3	$1,355 \cdot 10^{-7}$	$2,025 \cdot 10^{-12}$	$-6,700 \cdot 10^{-17}$	$3,060 \cdot 10^{-11}$	$3,191 \cdot 10^{-8}$	$5,470 \cdot 10^{-5}$	
	$N_tS_g^2$	$9,698 \cdot 10^{-11}$	$4,968 \cdot 10^{-16}$	$-7,892 \cdot 10^{-21}$	$-3,016 \cdot 10^{-14}$	$7,554 \cdot 10^{-11}$	$3,390 \cdot 10^{-7}$	
	S_gW^2	$-5,904 \cdot 10^{-12}$	$7,849 \cdot 10^{-17}$	$-9,058 \cdot 10^{-23}$	$3,787 \cdot 10^{-16}$	$8,156 \cdot 10^{-14}$	$-9,810 \cdot 10^{-9}$	
	S_gS^2	$3,192 \cdot 10^{-12}$	$-2,586 \cdot 10^{-16}$	$1,283 \cdot 10^{-21}$	$-7,203 \cdot 10^{-16}$	$-3,600 \cdot 10^{-12}$	$2,030 \cdot 10^{-8}$	
	$S_gR_{int}^2$	$2,087 \cdot 10^{-13}$	$2,192 \cdot 10^{-18}$	$-6,356 \cdot 10^{-23}$	$3,563 \cdot 10^{-17}$	$-3,544 \cdot 10^{-14}$	$9,950 \cdot 10^{-10}$	
	$S_gN_t^2$	$-2,784 \cdot 10^{-9}$	$8,064 \cdot 10^{-14}$	$-7,520 \cdot 10^{-19}$	$1,027 \cdot 10^{-12}$	$-4,598 \cdot 10^{-10}$	$-1,120 \cdot 10^{-5}$	
	S_g^3	$-4,608 \cdot 10^{-12}$	$8,784 \cdot 10^{-18}$	$1,265 \cdot 10^{-22}$	$5,233 \cdot 10^{-16}$	$-1,536 \cdot 10^{-12}$	$-7,740 \cdot 10^{-9}$	
	Modèle cubique complet	SN_tW	$-1,040 \cdot 10^{-9}$	$-1,448 \cdot 10^{-14}$	$5,949 \cdot 10^{-21}$	$8,330 \cdot 10^{-14}$	$-2,750 \cdot 10^{-10}$	$8,870 \cdot 10^{-7}$
		$R_{int}N_tW$	$4,369 \cdot 10^{-10}$	$-1,616 \cdot 10^{-14}$	$9,140 \cdot 10^{-20}$	$-5,165 \cdot 10^{-14}$	$-1,363 \cdot 10^{-10}$	$1,280 \cdot 10^{-6}$
		$R_{int}N_tS$	$-3,527 \cdot 10^{-10}$	$-4,638 \cdot 10^{-15}$	$4,088 \cdot 10^{-20}$	$-4,647 \cdot 10^{-14}$	$-1,458 \cdot 10^{-11}$	$-5,170 \cdot 10^{-7}$
		$R_{int}WS$	$-7,565 \cdot 10^{-12}$	$3,069 \cdot 10^{-16}$	$-2,527 \cdot 10^{-21}$	$1,195 \cdot 10^{-15}$	$3,240 \cdot 10^{-12}$	$-1,370 \cdot 10^{-8}$
		S_gN_tW	$-4,830 \cdot 10^{-11}$	$-1,835 \cdot 10^{-16}$	$-1,301 \cdot 10^{-21}$	$2,635 \cdot 10^{-15}$	$-1,726 \cdot 10^{-12}$	$-2,780 \cdot 10^{-7}$
S_gN_tS		$-2,681 \cdot 10^{-10}$	$4,672 \cdot 10^{-15}$	$-2,225 \cdot 10^{-20}$	$2,296 \cdot 10^{-14}$	$3,965 \cdot 10^{-11}$	$-4,500 \cdot 10^{-7}$	
$S_gN_tR_{int}$		$-2,620 \cdot 10^{-11}$	$7,885 \cdot 10^{-17}$	$1,570 \cdot 10^{-21}$	$2,375 \cdot 10^{-14}$	$-2,672 \cdot 10^{-11}$	$-2,220 \cdot 10^{-7}$	
S_gWS		$8,051 \cdot 10^{-13}$	$-4,556 \cdot 10^{-17}$	$-4,923 \cdot 10^{-23}$	$2,781 \cdot 10^{-16}$	$-1,691 \cdot 10^{-12}$	$-5,080 \cdot 10^{-9}$	
S_gWR_{int}		$1,426 \cdot 10^{-12}$	$-2,018 \cdot 10^{-17}$	$2,229 \cdot 10^{-22}$	$-3,122 \cdot 10^{-16}$	$3,028 \cdot 10^{-13}$	$-5,300 \cdot 10^{-10}$	
S_gSR_{int}	$-1,899 \cdot 10^{-12}$	$7,171 \cdot 10^{-17}$	$-4,782 \cdot 10^{-22}$	$-1,663 \cdot 10^{-16}$	$1,309 \cdot 10^{-12}$	$-4,040 \cdot 10^{-9}$		

Tableau 12 : Ensemble des coefficients du modèle géométrique (R_{geo} , L_{geo}).

Mesurons, dans un premier temps, l'aptitude des expressions polynomiales précédentes à représenter les paramètres électriques $\{R_1, R_2, R_3; L_0, L_1, L_2\}$. Nous produisons, Figure 12, les résultats de cette évaluation. Les courbes ci-dessous sont *a priori* très inquiétantes. Ainsi, si l'on excepte le coefficient L_0 , l'erreur sur les paramètres des modèles expérimentaux $R_{reg}(f)$ et $L_{reg}(f)$ excède 15 % dans au moins 10 % des cas étudiés. De plus, les fonctions de répartition complémentaires décroissent lentement, ce qui signifie qu'une fraction non négligeable du plan d'expériences est entachée d'erreurs élevées.

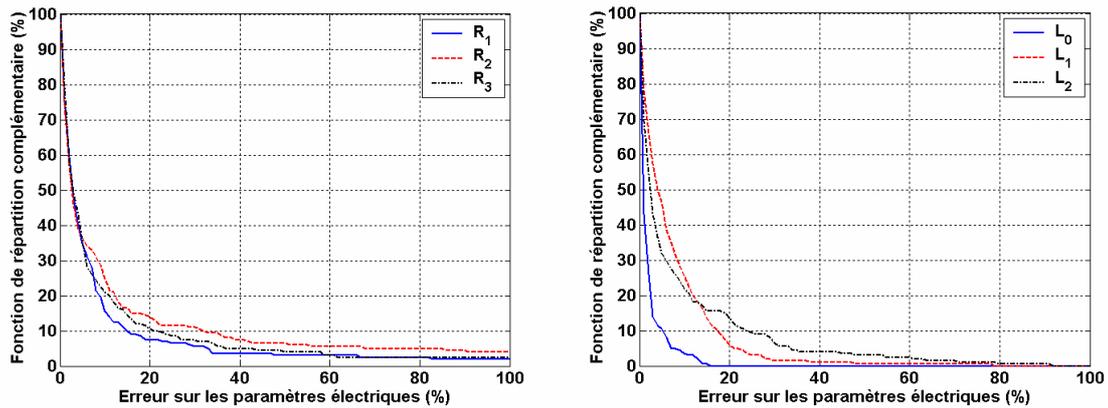


Figure 12 : Analyse statistique de l'erreur de modélisation sur les paramètres électriques de la résistance R_{reg} (à gauche) et de l'inductance équivalente L_{reg} (à droite).

Et pourtant, lorsque l'on compare le modèle géométrique aux simulations numériques originales (cf. Figure 13), il apparaît que 90 % des éléments du plan présentent une erreur moyenne inférieure à 5 %, qu'il s'agisse de la résistance $R_{num}(f)$ ou de l'inductance équivalente $L_{num}(f)$. Cet étonnant résultat, confirmé par les paramètres d'évaluation globale du plan d'expériences ($E_R^{moy} = 1,93 \%$, $E_R^{max} = 4,82 \%$, $E_L^{moy} = 1,82 \%$, $E_L^{max} = 1,94 \%$), nécessite de toute évidence quelques éclaircissements.

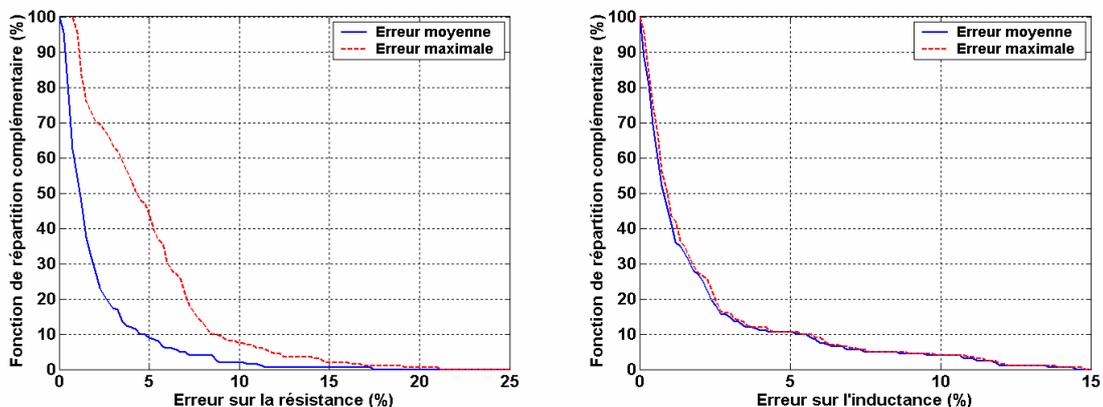


Figure 13 : Analyse statistique de l'erreur relative sur R_{num} (à gauche) et L_{num} (à droite), modèle Wheeler 2.

Une première remarque nous permet de modérer notre premier élan alarmiste. Car en effet, si l'erreur sur un paramètre du modèle peut être importante, comme le souligne la Figure 12, il est cependant beaucoup plus rare qu'une telle situation concerne simultanément tous les coefficients. L'analyse statistique réalisée traite indépendamment les variables $\{R_1, R_2, R_3; L_0, L_1, L_2\}$ et ne permet donc pas d'apprécier cette nuance. On comprend dès lors aisément que le défaut de représentation de la résistance $R_{num}(f)$ ou de l'inductance équivalente $L_{num}(f)$ ne peut être directement et simplement relié à l'erreur sur les coefficients des modèles expérimentaux $R_{reg}(f)$ et $L_{reg}(f)$. Il serait hâtif de tirer des conclusions sans avoir évalué au préalable la sensibilité de ces deux fonctions aux variations sur les paramètres réels R_k et L_l , où $(k, l) \in [1, p_R] \times [0, p_L]$.

Nous allons pour cela faire appel à l'analyse Monte Carlo, méthode à laquelle nous avons déjà eu recours au chapitre 1, et l'appliquer au modèle **Wheeler 2** dans le cas des inductances L_3 et L_4 , qui nous sont désormais familières. Cette technique est très intéressante car relativement simple à mettre en œuvre. Elle consiste à affecter à chaque coefficient du modèle expérimental une erreur relative aléatoire uniformément distribuée dans un intervalle $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ (%), la variable ε déterminant l'amplitude de la perturbation appliquée. On en mesure ensuite l'effet sur les réponses du modèle, en l'occurrence la résistance $R_{reg}(f)$ et l'inductance équivalente $L_{reg}(f)$, par comparaison à une référence : le modèle expérimental non "bruité". Celle-ci est effectuée sur la totalité de la plage de fréquences $[0, 6]$ GHz. Une réponse sera d'autant plus sensible qu'une perturbation aura des répercussions importantes. L'analyse Monte Carlo ne procède donc pas d'une démarche inductive mais déductive, ce qui oblige à effectuer cette opération un grand nombre de fois, afin de balayer au mieux l'espace des réalisations possibles. Les résultats de la Figure 14 correspondent à la moyenne des effets observés sur 1000 échantillons.

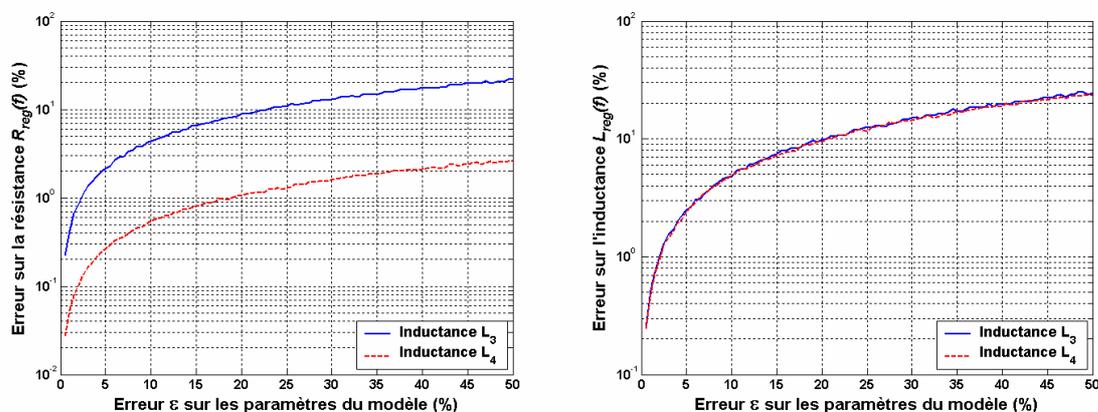


Figure 14 : Sensibilité de la résistance $R_{reg}(f)$ et de l'inductance équivalente $L_{reg}(f)$ à l'erreur sur les paramètres du modèle Wheeler 2.

Une erreur contenue dans l'intervalle $[-20, +20]$ % engendre statistiquement sur $L_{reg}(f)$ une erreur de 10 %, qu'il s'agisse de l'inductance L_3 ou L_4 . Les répercussions d'une erreur sur $R_{reg}(f)$

sont également faibles, confirmant ainsi ce que nous devinions auparavant : le modèle expérimental **Wheeler 2** est relativement peu sensible aux erreurs, et donc aux incertitudes si l'on traite des données expérimentales. La Figure 14 fait de plus apparaître de significatives différences entre les composants \mathbf{L}_3 et \mathbf{L}_4 lorsque l'on considère $R_{reg}(f)$, puisque $\varepsilon = 20\%$ implique dans le premier cas une variation de 9% alors que celle-ci n'excède pas 1% dans le second cas. Notons que la résistance en continu de l'inductance \mathbf{L}_4 ($R_{dc} = 1,51\ \Omega$) est largement plus forte que la résistance de l'inductance \mathbf{L}_3 ($R_{dc} = 0,24\ \Omega$). Les paramètres $\{R_1, R_2, R_3\}$ contrôlent l'évolution en fréquence de $R_{reg}(f)$, ils auront par conséquent d'autant plus d'impact que R_{dc} est faible. On peut donc en toute logique s'attendre à ce que le modèle paramétré soit, sur sa composante résistive, moins performant pour les inductances dont les pistes sont larges.

Rappelons enfin que l'incertitude expérimentale, déterminée au chapitre 1, est de 4% sur la résistance et de 0,3% sur l'inductance. A la lumière de ce résultat, nous concluons que l'étape de corrélation à la géométrie n'est pas transparente, contrairement à l'étape d'extraction. Elle introduit une erreur non négligeable devant l'incertitude expérimentale, erreur qu'il convient de justifier. L'ordre p du modèle polynomial P_p peut être trop faible par rapport à l'étendue du domaine de facteurs (Ω) que l'on cherche à couvrir. L'augmentation de l'ordre du modèle géométrique s'accompagne malheureusement de problèmes d'instabilité numérique, la matrice d'expériences X définie en (3.7) ayant tendance à devenir singulière. Une autre source d'erreur, plus insidieuse, a été mise à jour lors de l'étude statistique menée en 2.4.3.1. Il ressort en effet de cette étude que l'incertitude sur l'estimation d'un paramètre du modèle expérimental varie d'une inductance à l'autre. On en déduit que la sensibilité du modèle expérimental n'est pas constante dans l'espace des expériences. Les points d'expérience présentant une sensibilité élevée devraient faire l'objet d'attentions particulières lors de la génération du modèle géométrique. Une erreur de modélisation y sera en effet plus lourde de conséquences. Le logiciel Cornerstone™ [38], auquel nous avons recours pour réaliser l'analyse du plan, identifie les paramètres γ du modèle géométrique d'après la méthode des moindres carrés. Cette méthode n'autorise pas une pondération des expériences, et l'estimation de γ s'en trouve en toute rigueur biaisée.

4.2.1.2 Le modèle Wheeler 2 affiné

Il a été démontré au point 2.4.3.1 qu'en certaines occasions, une partie des paramètres du modèle **Wheeler 2** se révèlent être peu robustes, au sens où ils participent peu à l'explication des observations. Ces considérations d'ordre statistique ont débouché sur une procédure permettant d'écarter ces termes dont les effets sont négligeables relativement à l'incertitude expérimentale. Considérée indépendamment, l'étape d'affinage présente de nombreux avantages, mais il est important à présent de vérifier si cette brique élémentaire s'intègre harmonieusement à l'édifice

global que constitue le processus de modélisation. Nous allons discuter pour cela de la qualité d'un modèle géométrique consécutif à l'affinage, à partir des résultats de la Figure 15.

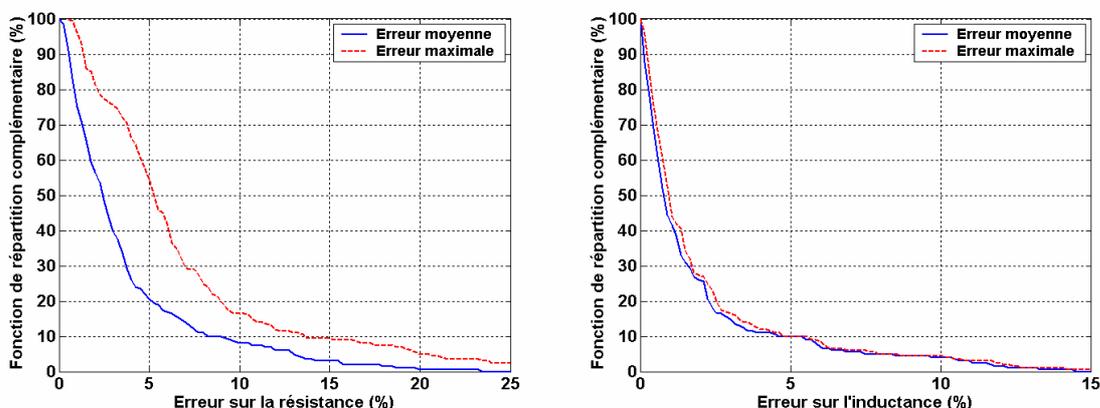


Figure 15 : Analyse statistique de l'erreur relative sur R_{num} (à gauche) et L_{num} (à droite), modèle Wheeler 2 affiné.

Si l'on s'en tient à la composante inductive, le modèle géométrique déduit du modèle expérimental **Wheeler 2** affiné est équivalent à la version issue du modèle **Wheeler 2** brut ($E_L^{moy} = 1,78 \%$, $E_L^{max} = 1,97 \%$). Il se révèle, par contre, être légèrement moins performant en ce qui concerne la résistance ($E_R^{moy} = 3,63 \%$, $E_R^{max} = 6,73 \%$). En effet, seuls 80 % des éléments du plan d'expériences présentent une erreur moyenne inférieure à 5 %, à comparer aux 90 % précédemment obtenus. Les écarts observés restent néanmoins minimes et une analyse plus fine nous semble ici nécessaire afin de mieux révéler les différences entre les deux modèles.

Nous introduisons dans ce but en (4.1) les erreurs de description e_R^{des} et e_L^{des} , respectivement relatives à la résistance et l'inductance équivalente. L'erreur de description, en soustrayant aux grandeurs à comparer leurs valeurs moyennes respectives, permet d'apprécier la part de variabilité d'une réponse qu'un modèle est capable d'expliquer. Elle peut en ce sens être rapprochée du coefficient de corrélation [39], souvent produit lors d'une analyse de régression, tout en étant à notre avis plus facile à interpréter.

$$e_X^{des} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \left| \frac{X_{geo}(f_j) - \bar{X}_{geo}}{X_{num}(f_j) - \bar{X}_{num}} - 1 \right| \quad X \in \{R, L\} \tag{4.1}$$

L'erreur de description mesure, dans la sombre affaire qui nous occupe, l'aptitude du modèle géométrique à représenter le comportement fréquentiel d'une inductance. Nul n'est besoin d'analyse chiffrée pour faire clairement apparaître la supériorité dans cet exercice du modèle géométrique brut. Un simple regard à la Figure 16 est ici amplement suffisant. L'échec, relatif, de la procédure d'affinage peut s'expliquer en notant que la génération d'un modèle géométrique

implique un nombre de réponses constant : le nombre de paramètres électriques extraits doit être identique pour toutes les inductances du plan d'expériences. L'affinage, dans cette optique, ne consiste donc plus à exclure un paramètre identifié comme étant non significatif, mais à le considérer nul. Cette opération est binaire au sens où elle n'est effectuée qu'au delà d'une certaine limite, appelée seuil de risque. Elle peut, en conséquence, introduire des discontinuités qui seront ensuite difficilement reproduites par un polynôme, lors de l'étape de corrélation à la géométrie.

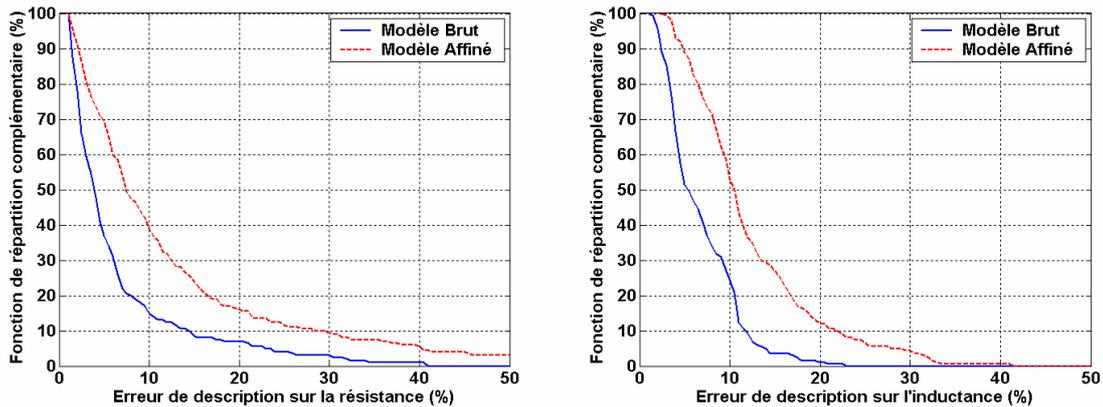


Figure 16 : Analyse statistique de l'erreur de description sur la résistance R_{num} et l'inductance L_{num} .

En conclusion, si l'affinage permet indéniablement de renforcer la signification physique du modèle expérimental, cela se fait au détriment de son aptitude au paramétrage. Nous préconisons, par conséquent, l'intégration du modèle **Wheeler 2** brut dans le processus global de modélisation, et réservons sa version affinée aux extractions réalisées au cas par cas.

4.2.1.3 Le modèle Rationnelle 2

Il ressort du paragraphe 2.4.2 qu'il est bien difficile de faire le *distinguo* entre les modèles **Wheeler 2** et **Rationnelle 2**, les deux représentations donnant des résultats très proches. Le choix du modèle **Wheeler 2** a pu, en ce sens, apparaître quelque peu arbitraire. Nous allons ici démontrer qu'il n'en est rien, et mettre en évidence les différences marquées qui apparaissent entre les deux modèles lors de l'étape de corrélation à la géométrie. Nous reprenons pour cela la démarche retenue au paragraphe 4.2.1.1. Une extraction de modèles expérimentaux de type **Rationnelle 2** est réalisée par projection sur l'ensemble des fonctions de transfert telles que $p_a = 3$ et $p_b = 2$. Certes légèrement inférieur à la base de Wheeler, l'ensemble des fonctions de transfert n'en reste pas moins tout à fait acceptable : $E_R^{moy} = 0,47 \%$, $E_R^{max} = 3,52 \%$, $E_L^{moy} = 0,05 \%$, $E_L^{max} = 1,09 \%$. Le modèle géométrique P_3 consécutif est tout d'abord comparé, Figure 17, aux paramètres extraits du modèle comportemental dont il découle.

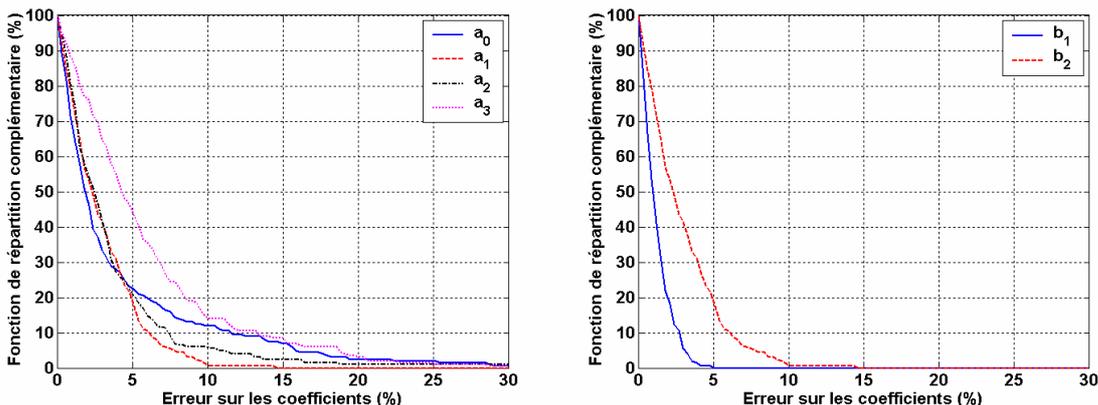


Figure 17 : Analyse statistique de l'erreur de modélisation sur les coefficients de la fonction de transfert H , au numérateur (à gauche) et au dénominateur (à droite).

Quelle que soit la réponse $Y \in \{a_0, a_1, a_2, a_3 ; b_1, b_2\}$, dans 90 % des cas étudiés l'erreur n'excède pas 15 %, ce qui est bien faible à la lumière des résultats établis au paragraphe 4.2.1.1. Le modèle géométrique construit d'après le modèle **Rationnelle 2**, est donc supérieur au modèle géométrique issu du modèle **Wheeler 2**, ce que nous laissons présager au paragraphe 2.4.2 (cf. Figure 7). La base des fonctions rationnelles complexes est à ce stade très prometteuse. Bien évidemment, nous n'envisageons ici que l'aptitude du modèle paramétré à représenter les coefficients Y du modèle comportemental, ce qui doit être distingué de sa capacité à représenter la résistance $R_{num}(f)$ et l'inductance équivalente $L_{num}(f)$, comme nous allons le voir à présent à l'aide de la Figure 18.

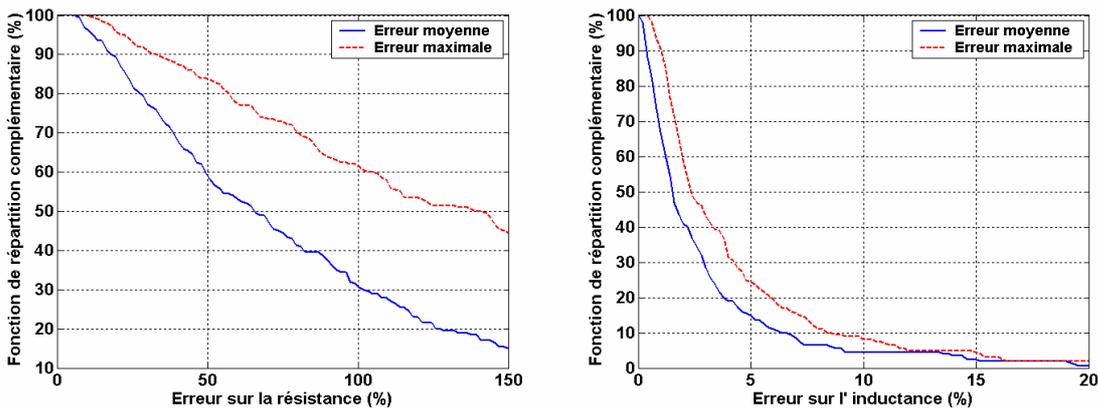


Figure 18 : Analyse statistique de l'erreur relative sur R_{num} et L_{num} , modèle **Rationnelle 2**.

Les résultats concernant l'inductance équivalente $L_{num}(f)$ sont satisfaisants puisque 85 % des inductances du plan ont une erreur moyenne inférieure à 5 % ($E_L^{moy} = 2,90\%$ et $E_L^{max} = 4,17\%$). Par contre, si l'on considère la résistance équivalente $R_{num}(f)$, il apparaît que seules 40 % des inductances présentent une erreur moyenne inférieure à 50 % ($E_R^{moy} = 84,6\%$, $E_R^{max} = 176\%$). De telles erreurs sont rédhitoires et le modèle s'en trouve rejeté sans appel. Cet échec ne peut être

directement imputé au modèle géométrique, et l'on doit en chercher la cause dans la structure même de la fonction H , définie en (2.15). Etudions la sensibilité de celle-ci aux variations sur les paramètres réels a_k et b_l , où $(k, l) \in [0, p_a] \times [1, p_b]$.

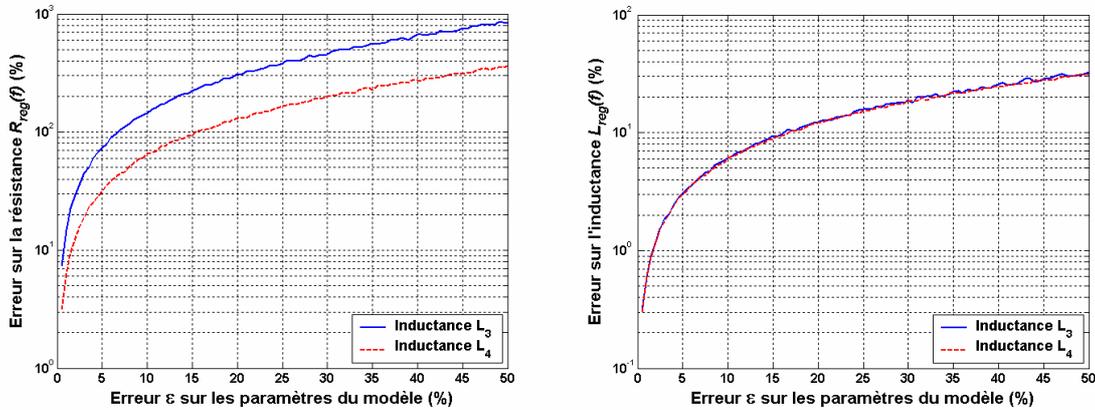


Figure 19 : Sensibilité de la résistance $R_{reg}(f)$ et de l'inductance équivalente $L_{reg}(f)$ à l'erreur sur les paramètres du modèle Rationnelle 2.

Le modèle **Rationnelle 2** se révèle être, sur sa composante résistive R_{reg} , beaucoup plus sensible aux erreurs que le modèle **Wheeler 2**. Une erreur aléatoire contenue dans l'intervalle $[-20, +20]$ % s'accompagne en effet de variations sur la partie réelle de H qui peuvent largement dépasser 100 %. Ainsi, l'erreur de modélisation introduite par l'étape de corrélation à la géométrie, bien que faible relativement au modèle comportemental extrait, n'est pas du tout négligeable du point de vue du processus global de modélisation (cf. Tableau 9). On observe les mêmes différences entre les inductances L_3 et L_4 que celles déjà mentionnées au paragraphe 4.2.1.1, et le même argument explicatif prévaut ici.

La représentation d'une impédance $Z(f)$ par une fonction de transfert est globale au sens où une seule fonction (complexe) est utilisée pour interpoler la partie réelle et la partie imaginaire de $Z(f)$. Il y a en conséquence six coefficients agissant sur $R_{reg}(f) = \text{Re}[H(s)]$ lorsque **Rationnelle 2** est employé, alors qu'ils ne sont que trois à agir sur son équivalent dans le cas du modèle **Wheeler 2**. Le nombre de sources d'erreurs, plus important, pourrait expliquer les résultats obtenus. Les erreurs ont en effet une fâcheuse et désagréable tendance à s'ajouter... Si nous avons effectivement observé une augmentation de la sensibilité de la partie réelle de H avec le nombre de perturbations, cette explication ne peut être retenue car la sensibilité est très élevée dès lors que le nombre de paramètres "bruités" est supérieur à un. Nous nous trouvons donc confronté, une fois de plus, à un problème d'instabilité numérique, l'erreur sur les coefficients Y étant en quelque sorte "amplifiée" par la fonction de transfert.

La sensibilité de l'inductance équivalente $L_{reg}(f)$ à l'erreur est approximativement la même pour les deux modèles expérimentaux considérés. Ceci explique que les modèles paramétrés résultants soient, en ce qui concerne $L_{reg}(f)$, de précisions comparables. Expliquer la différence comportementale entre $R_{reg}(f)$ et $L_{reg}(f)$ vis-à-vis de l'erreur résiduelle, nécessiterait une analyse mathématique fine de la sensibilité de la fonction H . Cette étude ne s'inscrit pas dans le cadre de ce travail mais le lecteur intéressé pourra avantageusement consulter, pour plus de détails, les références ci-après [40,41,42]. Nous ne retiendrons pour notre part que la conclusion suivante : un modèle paramétré issu de fonctions de transfert est incapable de représenter correctement la résistance équivalente $R_{num}(f)$, ce qu'autorise les fonctions "puissance".

4.2.2. Aptitude à la prédiction

4.2.2.1 Simulations aléatoires

Si les résultats obtenus jusqu'ici à l'aide du modèle **Wheeler 2** brut sont encourageants, ils ne nous permettent pas encore de statuer quant à la pertinence de la méthode de modélisation retenue. En effet, nous avons pour l'instant démontré l'aptitude du modèle géométrique à représenter correctement l'ensemble discret d'inductances dont il est issu, ce qui est somme toute la moindre des choses. Ce dernier doit plus généralement être capable de prédire le comportement de toute inductance contenue dans le domaine d'intérêt Ω (cf. Tableau 11). Nous critiquons, dans ce qui suit, les performances du modèle en interpolation d'après l'étude d'un ensemble d'inductances comprenant $N = 200$ échantillons aléatoirement répartis dans le domaine Ω , selon une loi de distribution uniforme.

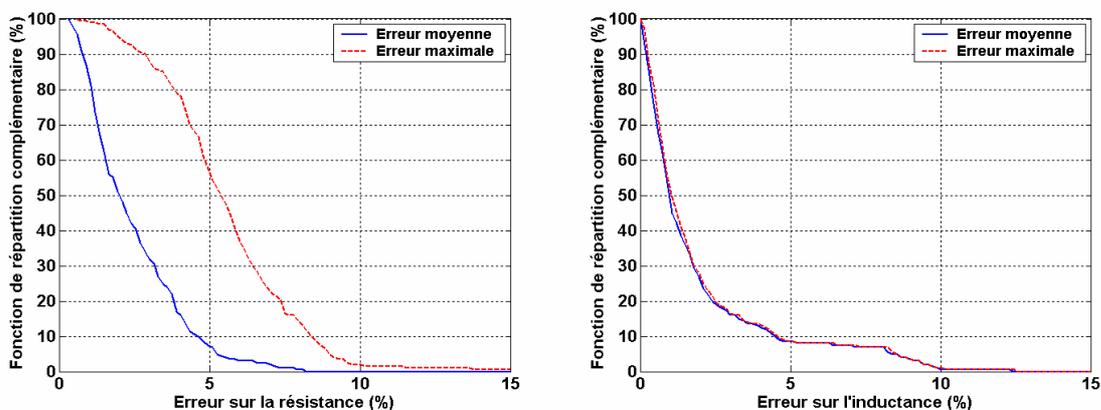


Figure 20 : Analyse statistique de l'erreur relative sur R_{num} et L_{num} , simulations aléatoires.

Les erreurs extraites, Figure 20, sont quasiment identiques à ce que nous avons pu observer sur le plan d'expériences avec : $E_R^{moy} = 2,44\%$, $E_R^{max} = 5,54\%$, $E_L^{moy} = 1,86\%$, $E_L^{max} = 1,95\%$.

Ceci tend à prouver que ce dernier discrétise suffisamment finement l'espace des expériences. On ne s'étonnera pas d'obtenir parfois de meilleurs résultats en interpolation que pour le plan d'expériences initial. Ce qui, à première vue, peut paraître paradoxal, s'explique facilement à la lumière de la remarque suivante. L'estimateur de maximum de vraisemblance utilisé par la méthode des moindres carrés porte sur les résidus en valeur absolue et non pas relative. Il défavorise donc, si l'on considère un critère d'évaluation lui-même relatif, les zones de l'espace des facteurs où la réponse prend les valeurs les plus faibles. Or, il n'est pas rare qu'un paramètre électrique extrait atteigne son minimum aux limites du domaine de l'espace des facteurs étudié. C'est par exemple le cas de l'inductance haute fréquence $L_0 \equiv L_{ac}$, d'autant plus faible que le nombre de tours N_t décroît. Or, les algorithmes de Galil-Kiefer et Johnson-Nachtsheim conduisent, nous l'avons montré, à une augmentation de la densité d'expériences aux bords du domaine Ω . Une erreur de modélisation en limite de domaine se trouvera donc amplifiée lors de l'évaluation globale du plan, du simple fait que le nombre d'expériences y est plus important.

En conséquence, les résultats de la Figure 20, issus du tirage aléatoire d'un grand nombre d'échantillons, sont sans doute plus représentatifs des performances du modèle géométrique en utilisation courante. L'erreur moyenne n'excède pas 7 % sur la résistance $R_{num}(f)$ et 12 % sur l'inductance équivalente $L_{num}(f)$. Ceci valide l'ensemble du processus de modélisation développé au cours de ce chapitre et constitue un argument de choix en faveur du modèle paramétré qui en résulte. Ce dernier décrit, rappelons-le, le comportement fréquentiel d'une inductance en fonction de cinq variables géométriques (W, S, R_{im}, N_t, S_g) ce qui est, à notre connaissance, sans équivalent antérieur.

Nous parachevons la validation du processus de modélisation avec l'analyse de la répartition statistique, représentée Figure 21, des erreurs de description e_R^{des} et e_L^{des} précédemment définies. Il ressort de cette étude que 85 % des échantillons vérifient $e_L^{des} \leq 10$ %, cette proportion tombant à 70 % sous la condition $e_R^{des} \leq 10$ %. L'erreur de description maximale observée sur l'ensemble des échantillons du tirage aléatoire est de 15 % en ce qui concerne l'inductance équivalente, pour atteindre 40 % sur la résistance. Ces résultats semblent indiquer que le modèle cubique (P_3) est sans doute légèrement insuffisant pour représenter fidèlement, sur la totalité du domaine Ω , les variations en fréquence de la résistance.

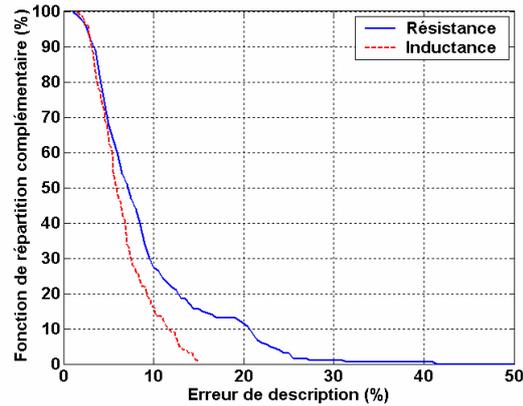


Figure 21 : Analyse statistique de l'erreur de description sur la résistance R_{num} et l'inductance équivalente L_{num} , simulations aléatoires.

La solution la plus évidente est d'augmenter l'ordre du modèle, ce qui nous confronte par là même aux problèmes numériques évoqués au paragraphe 4.2.1.1. Cette éventualité n'est cependant à envisager que si l'on identifie l'étape de connexion à la géométrie comme étant le facteur limitant la précision finale du modèle paramétré, ce qui n'est pas fait. En effet, le modèle géométrique est issu de simulations numériques qui, nous l'avons vu au chapitre précédent, sont également entachées d'erreurs. Il est donc nécessaire, avant de pousser plus avant l'étude, de soumettre notre modèle au jugement d'airain de l'expérience...

4.2.2.2 Confrontation à la mesure

Le modèle géométrique $P_p(\Gamma)$, $p = 3$, est comparé à la mesure sur l'ensemble Λ de 40 inductances auquel nous avons déjà eu recours au chapitre 3. Cet ensemble d'évaluation est valide car ses bornes sont contenues dans le domaine Ω étudié (cf. Tableau 11). Le modèle géométrique est donc bien utilisé en interpolation, seul emploi autorisé. Le chapitre 3 a mis en évidence les limitations de la méthode PEEC au-delà de 3 GHz, liées en particulier à l'omission des effets capacitifs. Le modèle P_p étant issu de simulations numériques PEEC, il présente intrinsèquement les mêmes défauts et nous allons en conséquence appliquer, pour son examen, le même mode opératoire qu'au chapitre précédent. L'évaluation des performances du modèle géométrique, réalisée sur les deux plages de fréquences : $\Delta f_1 = [0, 3]$ GHz et $\Delta f_2 = [0, 6]$ GHz, est consignée Figure 22 et Figure 23.

Notons dès à présent la ressemblance frappante existant entre les deux figures ci-dessous et les Figures 27 et 28 du chapitre 3. Ceci confirme deux résultats successivement établis aux paragraphes 4.2.1.1 et 4.2.2.1. D'une part, la capacité du modèle paramétré à représenter fidèlement les simulations numériques et d'autre part, son aptitude à la prédiction. En effet, seule

une partie des inductances de l'ensemble Λ appartient également à Ψ et *a fortiori* au plan d'expériences.

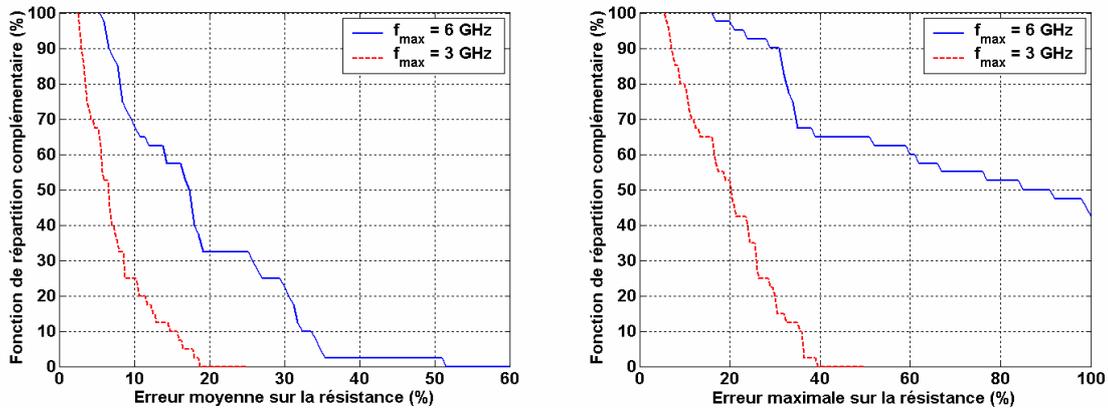


Figure 22 : Analyse statistique de l'erreur relative sur $R(f)$, comparaison à la mesure.

Il découle de cette similitude que les remarques faites au chapitre précédent prévalent également ici. La modélisation de la résistance $R(f)$ est correcte sur l'intervalle Δf_1 : $E_R^{moy} = 7,52\%$, $E_R^{max} = 20,08\%$. Les trois quarts des inductances testées présentent une erreur moyenne inférieure à 10 %. Comme nous l'avons déjà constaté, les résultats se dégradent lorsque la comparaison est réalisée sur la plage de fréquences Δf_2 .

Les performances exhibées par le modèle paramétré sont, sur l'inductance équivalente $L(f)$, inférieures au modèle numérique. Ce qui apparaît à la lumière des erreurs globales calculées sur l'intervalle Δf_1 ($E_L^{moy} = 5,1\%$, $E_L^{max} = 6,34\%$) se confirme lorsque l'on s'intéresse à la fonction de répartition complémentaire, Figure 23. Ainsi, 70 % des inductances présentent une erreur moyenne inférieure à 5 %, contre 90 % pour le modèle numérique (*cf.* Figure 28, chapitre 3). C'est donc l'étape de corrélation à la géométrie qui limite la précision du modèle géométrique en l'état actuel, et non la simulation numérique initiale.

Au fil des améliorations apportées au simulateur PEEC, nous nous sommes cependant aperçus qu'un modèle paramétré pouvait être légèrement plus précis que les simulations numériques dont il résulte. Trouver une explication à cet étonnant résultat n'est pas chose aisée mais l'on peut néanmoins s'essayer à quelques conjectures. Il est clair que l'impact d'un défaut de modélisation sur $L_{num}(f)$ dépend de la valeur des paramètres géométriques, en d'autres termes de l'inductance considérée. Par exemple, l'erreur introduite par l'approximation de Simpson est d'autant plus importante que le nombre de tours N_i est faible. Considérons la fonction g_j – $j \in [0, p_L]$ – définie par l'équation (3.2), qui lie les coefficients extraits L_j à la géométrie. L'erreur

de modélisation se reporte également sur g_j , par transitivité. Il ne s'agit que d'une hypothèse bien entendu, mais supposons qu'un défaut du simulateur se traduise sur g_j par des discontinuités. L'interpolation polynomiale, de par ses limitations mêmes (en l'occurrence l'ordre p du polynôme), aura alors pour conséquence de lisser ces imperfections, et donc de diminuer l'effet de la lacune initiale. Vice, parfois, devient vertu...

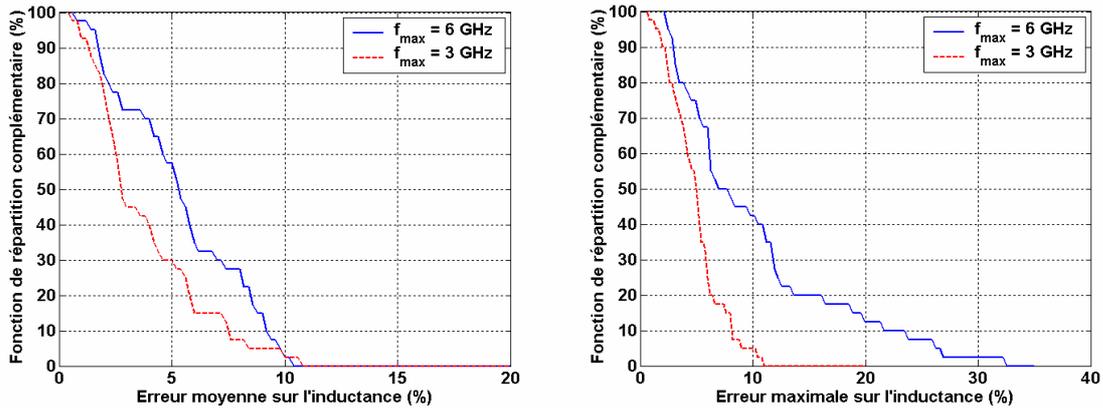


Figure 23 : Analyse statistique de l'erreur relative sur $L(f)$, comparaison à la mesure.

Nous concluons cette partie en reprenant l'exemple des inductances L_1 et L_2 , introduites au chapitre précédent, afin, d'une part, d'apprécier les aptitudes du modèle géométrique et d'autre part, d'illustrer graphiquement les analyses statistiques réalisées. La première inductance a , rappelons-le, les caractéristiques suivantes : $W = 30 \mu\text{m}$, $S = 20 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 75 \mu\text{m}$, $N_t = 3,5$, et $S_g = 50 \mu\text{m}$. L'inductance L_2 est, quant à elle, définie par : $W = 10 \mu\text{m}$, $S = 10 \mu\text{m}$, $T = 3 \mu\text{m}$, $R_{int} = 125 \mu\text{m}$, $N_t = 2,5$, $S_g = 150 \mu\text{m}$. Les courbes associées à chaque inductance sont respectivement reproduites Figure 24 et Figure 25. Enfin, les erreurs relatives moyennes et maximales calculées sur la résistance (e_R^{moy} , e_R^{max}) et l'inductance équivalente (e_L^{moy} , e_L^{max}) sont données dans le Tableau 13, reporté à la fin de ce paragraphe.

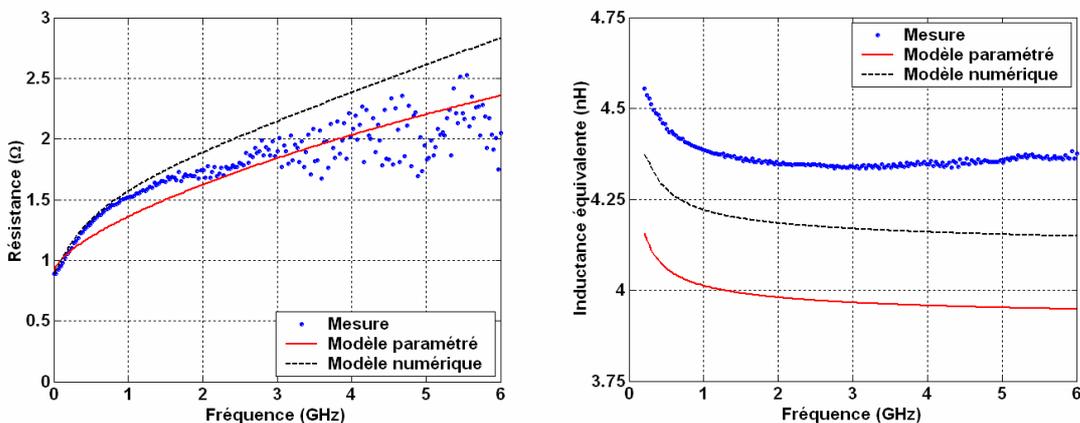


Figure 24 : Résistance et inductance équivalente de l'inductance L_1 .

Le cas de l'inductance L_1 est plutôt défavorable au sens où le modèle analytique a quelques difficultés à reproduire fidèlement le modèle numérique. L'erreur commise sur $R(f)$ reste néanmoins comparable à ce que nous avons établi au chapitre 3 avec $e_R^{moy} = 6,77\%$ sur la plage de fréquences Δf_1 . La croissance de la fonction $R_{geo}(f)$ est trop faible, ce qui laisse entendre une sous-évaluation du coefficient pondérant la fonction $\{f\}$ de la base de Wheeler. On vérifie ainsi que $R_2^{geo} = 1,77 \cdot 10^{-10} \Omega/\text{Hz}$ alors que $R_2^{reg} = 2,36 \cdot 10^{-10} \Omega/\text{Hz}$. Le défaut de modélisation de $L(f)$ atteint $e_L^{moy} = 8,56\%$ sur Δf_1 . S'il est vrai que le modèle paramétré $L_{geo}(f)$ sous-estime clairement $L_{num}(f)$, on relèvera également que les variations de cette fonction sont parfaitement respectées ce qui démontre la capacité du processus de corrélation à la géométrie à reproduire fidèlement un comportement fréquentiel.

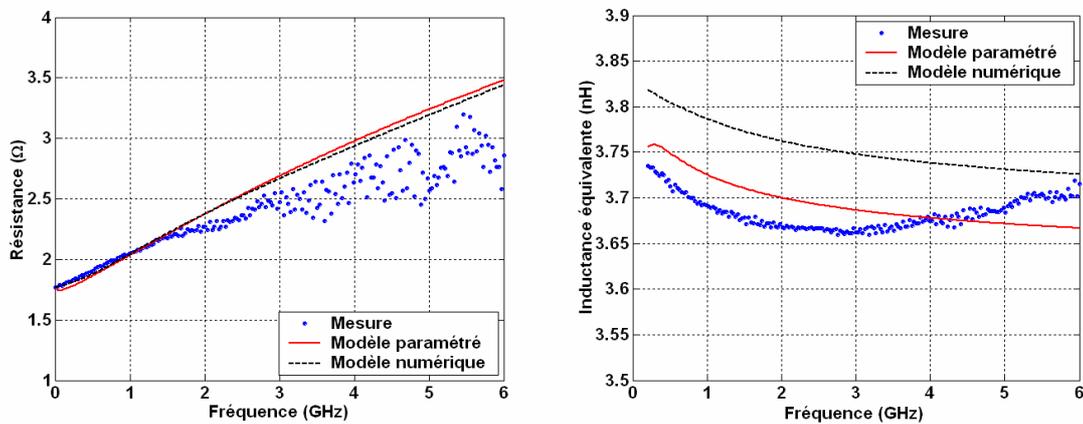


Figure 25 : Résistance et inductance équivalente de l'inductance L_2 .

L'exemple de l'inductance L_2 est beaucoup plus probant. Il est en effet bien difficile de discerner le modèle géométrique $R_{geo}(f)$ de son géniteur numérique $R_{num}(f)$. La précision du modèle final n'est pas ici limitée par la capacité de ce dernier à copier la simulation numérique PEEC, mais par l'aptitude de celle-ci à représenter la mesure. Un rapide coup d'œil au Tableau 13 nous indique que l'erreur relative moyenne, calculée pour l'inductance équivalente sur l'intervalle Δf_1 , est de 0,84 %, ce qui est proche de l'incertitude expérimentale. Il n'est donc pas abusif de conclure par la validation de notre modèle paramétré, ce qui démontre implicitement la pertinence de la technique de modélisation ici mise en place. Celle-ci conduit à des résultats certes améliorables mais néanmoins satisfaisants à ce stade de l'étude.

Inductance	Intervalle	e_R^{moy} (%)	e_R^{max} (%)	e_L^{moy} (%)	e_L^{max} (%)
L_1	Δf_1	6,77	11,09	8,56	8,92
	Δf_2	7,72	34,73	8,86	9,92
L_2	Δf_1	3,52	10,86	0,84	1,08
	Δf_2	9,61	34,42	0,66	1,39

Tableau 13 : Erreurs relatives moyennes et maximales sur $R(f)$ et $L(f)$, calculées pour les inductances L_1 et L_2 .

5. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode globale de représentation d'impédance. Ce type de modélisation, basé sur des simulations physiques PEEC, est réalisé en deux étapes bien distinctes. La première étape consiste à projeter l'impédance équivalente sur une base de fonctions que nous avons établie d'après les travaux de Wheeler. Cette base de projection est certes moins générale que l'ensemble des fonctions de transfert, mais permet cependant une compréhension plus intuitive des phénomènes impliqués dans la réponse du composant. D'autre part, nous nous sommes attachés à démontrer que cette base présente de meilleures propriétés numériques.

La seconde étape tente une corrélation d'un ensemble d'extractions à la géométrie. Elle est basée sur la théorie des plans d'expériences. En effet, la diversité des comportements observés, fonction des caractéristiques géométriques de l'inductance, nécessite des modèles complexes, ce d'autant plus que la structure retenue pour ces derniers est polynomiale. Les plans d'expériences, s'inscrivent dans un cadre théorique rigoureux, et proposent une réponse adaptée à ce type de problème. Nous avons pu ainsi produire un modèle dépendant de cinq paramètres géométriques : la largeur des pistes, l'espacement inter-spires, le rayon interne, le nombre de tours, et enfin l'espacement au plan de masse. La précision obtenue, de l'ordre de 8 % sur la résistance et 5 % sur l'inductance équivalente, en fait un outil de prédiction performant. Nous avons fait figurer dans le Tableau 14 un récapitulatif des résultats obtenus.

Wheeler 2	E^{moy}	Plan d'expériences	Interpolation	Mesure (6 GHz)	Mesure (3 GHz)
$R_{geo}(f)$	$\leq 5 \%$	91 %	92 %	0 %	32 %
	$\leq 10 \%$	98 %	100 %	30 %	75 %
$L_{geo}(f)$	$\leq 5 \%$	89 %	91 %	42 %	70 %
	$\leq 10 \%$	97 %	99 %	97 %	97 %

Tableau 14 : Récapitulatif des performances du modèle géométrique P_3 .

Il a été démontré, dans ce chapitre, qu'il était possible de produire un modèle précis intégrant de nombreux paramètres géométriques. Le modèle paramétré est, de plus, complètement analytique et peut donc en conséquence être facilement intégré dans une bibliothèque de modèles. Certaines évolutions peuvent être à ce stade envisagées. En effet, la prise en compte au niveau de la simulation des phénomènes capacitifs permettrait, en appliquant cette même méthode au quadripôle obtenu, l'obtention d'une représentation comportementale complète. Notons que le raffinement de notre simulateur s'accompagnera inévitablement de temps de calculs plus élevés – pour ne pas dire beaucoup plus élevés – qui peuvent s'avérer problématiques dans le cadre de la détermination d'un modèle expérimental paramétré. L'expérience acquise dans le domaine de l'interpolation pourra se révéler d'une grande aide en limitant au maximum le nombre de simulations numériques nécessaire à la production d'une réponse large bande [43,44]. Ce travail peut donc également constituer le point de départ d'une nouvelle étude qui s'inscrira complètement dans la lignée de thèmes de recherche très actuels [45].

Du point de vue numérique enfin, nous avons démontré que la variance relative à l'extraction d'un paramètre du modèle comportemental varie d'une inductance à l'autre, ce qui a pour conséquence de biaiser l'estimation des coefficients du modèle géométrique. Une technique commune de "stabilisation" de la variance consiste à réaliser une transformation de la réponse Y , où $Y \in \{ R_1, \dots, R_{p_R}; L_0, \dots, L_{p_L} \}$. Elle n'est pas applicable ici car les transformations usuelles ($\ln Y$, \sqrt{Y} , ...) exigent que la réponse Y soit strictement positive. La qualité de la détermination du modèle géométrique doit néanmoins pouvoir être améliorée en intégrant la variance lors du traitement du plan d'expériences. Ceci revient à appliquer non plus la méthode des moindres carrés mais la méthode dite du Chi-deux [46]. Le logiciel d'analyse de données employé jusqu'alors, Cornerstone™, est inadapté et il doit en conséquence être envisagé l'utilisation d'un outil d'analyse de régression plus évolué.

Références

- [1] **J. Nelder, R. Mead**, "A Simplex Method for Function Minimization", *Computer Journal*, Vol. 7, 1965, pp. 308 – 313.
- [2] **J. Moré**, "The Levenberg-Marquardt Algorithm : Implementation and Theory", *Numerical Analysis, Lecture Notes in Mathematics 630, Editions G. Watson, Springer Verlag*, 1977, pp. 105 – 116.
- [3] **C. Benoît**, "Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un système d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues. Application de la méthode à la résolution d'un système défini d'équations linéaires (Procédé du Commandant Choleski)", *Bulletin Géodésique (Toulouse)*, Vol. 2, 1924, pp. 5 – 77.
- [4] **A. Van Der Sluis**, "Stability of Solutions of Linear Algebraic Systems", *Numerical Mathematics*, Vol. 14, 1970, pp. 246 – 251.
- [5] **A. Van Der Sluis**, "Condition Number and Equilibration of Matrices", *Numerical Mathematics*, Vol. 14, 1969, pp. 14 – 23.
- [6] **A. Soysal, A. Semlyen**, "Practical Transfer Function Estimation and its Application to Wide Frequency Range Representation of Transformers", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 8, n° 3, July 1993, pp. 1627 – 1637.
- [7] **E. Beltrami**, "Sulle Funzioni Bilineari", *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita*, Vol. 11, 1873, pp. 98 – 106. Traduction anglaise : **D. Boley**, "On Bilinear Functions", *Technical Report 90-37, Department of Computer Science, University of Minnesota*, 1990.
- [8] **C. Jordan**, "Mémoire sur les Formes Bilinéaires", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Deuxième série*, Vol. 19, 1874, pp. 35 – 54.
- [9] **G. Stewart**, "The Decompositional Approach to Matrix Computation", *Computing in Sciences and Engineering*, January / February 2000, pp. 50 – 59.
- [10] **A. Van Der Veen, E. Deprettere, A. Lee Swindlehurst**, "Subspace-Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 81, n° 9, September 1993, pp. 1277 – 1308.
- [11] **E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. Mac Kenney, D. Sorensen**, *LAPACK User's Guide, Third Edition*, Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

- [12] **R. Penrose**, "A Generalized Inverse for Matrices", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 51, 1955, pp. 406 – 413.
- [13] **A. Cauchy**, "Sur la Formule de Lagrange Relative à l'Interpolation", *Analyse Algébrique*, Paris, 1821.
- [14] **K. Choi, M. Swaminathan**, "Synthesis of RF Circuits for Embedded Passive Components in Mixed Signal Applications", *IEEE Conference on Electronic Components and Technology Conference*, 1998, pp. 1052 – 1060.
- [15] **E. Levy**, "Complex Curve Fitting", *IRE Transactions on Automatic Control*, Vol. 4, May 1959, pp. 37 – 44.
- [16] **C. Sanathanan, J. Koerner**, "Transfer Function Synthesis as a Ratio of Two Complex Polynomials", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 8, January 1963, pp. 56 – 58.
- [17] **J. Lopez-Villegas, J. Samitier, C. Cané, P. Losantos, J. Bausells**, "Improvement of the Quality Factor of RF Integrated Inductors by Layout Optimization", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 48, n° 1, January 2000, pp. 76 – 83.
- [18] **K. Ashby, I. Koullias, W. Finley, J. Bastek, S. Moinian**, "High Q Inductors for Wireless Applications in a Complementary Silicon Bipolar Process", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 31, n° 1, January 1996, pp. 4 – 9.
- [19] **M. Park, C. Kim, C. S. Kim, M. Park, S. Kim, Y. Youn, H. Yu**, "Frequency-Dependent Series Resistance of Monolithic Spiral Inductors", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 9, n° 12, December 1999, pp. 514 – 516.
- [20] **Centre d'Enseignement et de Recherche de Statistique Appliquée**, "Aide-Mémoire Pratique des Techniques Statistiques", *Revue de Statistique Appliquée*, Vol. 34, 2^{ème} édition, 1986, pp. 40.
- [21] **J. Trigeassou**, *Recherche de Modèles Expérimentaux*, Paris : Technique et Documentation Lavoisier, Chapitre 12, 1988, pp. 266 – 267.
- [22] **E. Weisstein**, "Erf", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, pp. 561 – 562.
- [23] **E. Weisstein**, "Student's t-Distribution", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, pp. 1751 – 1752.
- [24] **E. Weisstein**, "Regularized Beta Function", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, pp. 125 – 126 & pp. 1542.

- [25] **J. Ferreira**, "Improved Analytical Modeling of Conducting Losses in Magnetic Components", *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 9, n° 1, January 1994, pp. 83 – 109.
- [26] **C. Lawson, R. Hanson**, *Solving Least Square Problems*, Englewood Cliffs : Prentice Hall, Chapter 23, 1974.
- [27] **F. Taylor**, *Principles of Scientific Management*, 1909, Greenwood Press Publishers, 1972.
- [28] **A. Atkinson, R. Bailey**, "One Hundred Years of the Design of Experiments On and Off the Pages of *Biometrika*", *Biometrika*, Vol. 88, n° 1, February 2001, pp. 53 – 97.
- [29] **P. Hu, M. Zelen**, "Planning Clinical Trials to Evaluate Early Detection Programmes", *Biometrika*, Vol. 84, n° 4, December 1997, pp. 817 – 829.
- [30] **S. Baragetti**, "Shot Peening Optimisation by Means of 'DOE' : Numerical Simulation and Choice of Treatment Parameters", *International Journal of Materials and Product Technology*, Vol. 12, n° 2 – 3, pp. 83 – 109.
- [31] **D. Daniel, R. Bloom, J. Reece**, "Identifying an Etch Process Window Using Response Surface Methodology", *Solid-State Technology*, September 1988, pp. 117 – 120.
- [32] **P. Leduc**, "Simulation de la filière ASD3", *Rapport en vue de l'obtention du Diplôme d'Etudes Approfondies*, Chapitre 6, Septembre 1999, pp. 29 – 34.
- [33] **G. Box, N. Draper**, "Robust Designs", *Biometrika*, Vol. 62, n° 2, 1975, pp. 347 – 352.
- [34] **R. Koshal**, "Application of the Method of Maximum Likelihood to the Improvement of Curves Fitted by the Method of Moments", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. A-96, 1933, pp. 303 – 313.
- [35] **H. Wynn**, "Results in the Theory and Construction of D-Optimum Experimental Designs", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. B-34, 1972, pp. 133 – 147.
- [36] **Z. Galil, J. Kiefer**, "Time and Space-Saving Computer Methods, Related to Mitchell's DETMAX, for finding D-Optimum Designs", *Technometrics*, Vol. 21, 1980, pp. 301 – 313.
- [37] **M. Johnson, C. Nachtshiem**, "Some Guidelines for Constructing Exact D-Optimal Designs on Convex Design Spaces", *Technometrics*, Vol. 25, August 1983, pp. 271 – 277.
- [38] *Cornerstone™ Release 3.0*, Domain Manufacturing Corporation, 1999.
- [39] **E. Weisstein**, "Correlation Coefficient", *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, pp. 332.

- [40] **M. Eslami, R. Marleau**, "Theory of Sensitivity of Network : a Tutorial", *IEEE Transactions on Education*, Vol. 32, pp. 319 – 334.
- [41] **W. Troop, E. Peskin**, "The Transfer Function and Sensitivity of a Network with N-Variable Elements", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. 16, n° 2, May 1969, pp. 242 – 244.
- [42] **M. Styblinski**, "An Extension of the Rosenblum-Ghausi Sensitivity Measure to Complex Parameters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 23, n° 6, June 1976, pp. 343 – 349.
- [43] **K. Kottapalli, T. Sarkar, Y. Hua, E. Miller, G. Burke**, "Accurate Computation of Wide-Band Response of Electromagnetic Systems Utilizing Narrow-Band Information", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, n° 4, April 1991, pp. 682 – 687.
- [44] **R. Adve, T. Sarkar, S. Rao, E. Miller, D. Pflug**, "Application of the Cauchy Method for Extrapolating / Interpolating Narrow-Band System Responses", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 45, n° 5, May 1997, pp. 837 – 845.
- [45] **J. Rautio**, "EM Approach Sets New Speed Records", *Microwave & RF*, May 2002, pp. 81 – 96.
- [46] **W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery**, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, second edition, Cambridge University Press, Chapter 15, 1992, pp. 671 – 672.

Conclusion

"Le mal de prendre une hypallage pour une découverte, une métaphore pour une démonstration, un vomissement de mots pour un torrent de connaissances capitales, et soi-même pour un oracle, ce mal naît avec nous."

P. Valéry, Oeuvres, I.

1. Bilan des travaux

Au moment de conclure, il nous semble important de rappeler dans quel esprit a été réalisé ce travail, et d'énoncer – un peu plus explicitement peut-être – les quelques règles ayant guidé la rédaction de ce mémoire. Ainsi, bien que cela puisse paraître paradoxal pour un travail de thèse, l'approche que nous avons retenue se veut avant tout généraliste. Notre seule ambition fut de "trouver notre chemin à travers le labyrinthe des faits observés" [1], pour tenter d'établir quelques liens de causes à effets, en insistant tout particulièrement sur les difficultés et les limitations que notre étude a pu mettre au jour. Elaboré dans un but prospectif, un modèle est en effet une représentation provisoire, dont l'accord avec les théories admises est bien souvent imparfait. Les résultats que nous avons obtenus portent sur les grandes étapes essentielles à l'établissement d'une bibliothèque de modèles, chacune faisant l'objet d'un chapitre dont nous allons à présent rapidement rappeler la teneur.

Le premier chapitre est expérimental et décrit l'appareillage ainsi que le processus complexe nécessaires à la caractérisation de composants passifs dans le domaine des Radio-Fréquences (RF). La chaîne de mesure comporte en effet de nombreuses interfaces, chacune amenant son lot de parasites perturbateurs dont il convient de tenir compte. Ainsi, la mesure est loin d'être directe et requiert plusieurs corrections successives. Nous nous sommes en particulier intéressés, dans ce chapitre, à l'étape de correction des parasites introduits par le motif de mesure. L'étude des différentes techniques de compensation ayant cours en métrologie RF a permis de dégager une méthode plus économe, car elle s'accompagne d'une diminution de la surface allouée sur plaquette aux structures de test. Si cette dernière n'est pas optimale dans sa version actuelle, elle n'en est pas moins très prometteuse. Ses principales qualités et défauts ont été déterminés d'après une analyse statistique comparée, qui a donné lieu, par la même occasion, à une estimation de la précision expérimentale de notre banc de mesures hyperfréquences.

Le second chapitre présente le modèle comportemental associé aux inductances spiralées qui est actuellement implémenté dans la bibliothèque de modèles. Cette représentation est paramétrée, la seule connaissance des caractéristiques géométriques d'une inductance spiralée est suffisante pour en déduire sa réponse électrique sur la plage de fréquences [0, 6] GHz. L'architecture du modèle est un circuit électrique compact dont les éléments sont extraits grâce à une démarche expérimentale impliquant l'optimisation paramétrique. Ces éléments sont ensuite reliés aux variables géométriques par l'intermédiaire de formules analytiques qui, bien que très simples, font preuve d'une étonnante précision. L'optimisation explique, pour une grande part, les performances des modèles comportementaux. C'est également elle qui est à l'origine de leur principal

inconvenient. Les possibilités de variation des paramètres géométriques qu'ils intègrent sont en effet limitées, ce qui entrave considérablement les aptitudes à la prédiction de tels modèles.

Nous nous sommes, en conséquence, orientés vers le développement d'un simulateur électromagnétique, introduit dans le chapitre suivant. Celui-ci est basé sur la méthode PEEC, technique de résolution numérique de la composante magnétique des équations de Maxwell intégrales. Elle permet la modélisation des caractéristiques électriques en transmission d'une structure conductrice. La spécificité de ce travail fut de profiter de la symétrie quasi axiale de l'inductance spiralée pour adopter une décomposition des conducteurs à l'aide de filaments circulaires. Cette approche originale nécessite une reformulation analytique complète de la méthode, travail qui s'avère néanmoins payant. La méthode résultante, très spécifique, est également particulièrement efficace. Une structure étendue, comme le plan de masse coplanaire entourant l'inductance par exemple, peut ainsi être facilement et rapidement traitée. Les modèles que nous avons obtenus sont très corrects jusqu'à 3 GHz, l'erreur relative moyenne observée par rapport à la mesure étant alors de 5,4 % pour la résistance et 2,3 % pour l'inductance équivalente.

Bien qu'un intérêt tout particulier ait été porté aux temps de simulation, ces derniers restent néanmoins trop longs pour permettre une implémentation directe du simulateur dans la bibliothèque. Le dernier chapitre de ce mémoire traite donc de la génération, à partir du modèle numérique, d'un modèle analytique paramétré en fonction de cinq variables géométriques : la largeur des pistes de l'inductance, l'espacement inter-spices, le rayon interne, le nombre de tours et l'espacement au plan de masse. Si la problématique est fondamentalement identique à celle du chapitre 2, la réponse apportée est en revanche beaucoup plus élaborée. En effet, le nombre de variables explicatives impliquées est tel, que la modélisation comportementale serait par avance vouée à l'échec, sans une démarche rigoureuse. On retrouve, dans les grandes lignes, les étapes de modélisation introduites au chapitre 2. Celles-ci ont seulement, si l'on peut dire, été généralisées. Nous retiendrons que l'extraction paramétrique fait appel à l'inversion matricielle SVD ("Singular Value Decomposition") ainsi qu'à des techniques statistiques d'analyse de robustesse. La liaison à la géométrie, quant à elle, s'inscrit dans le cadre strict de la théorie des plans d'expériences. Le modèle final, polynomial, est représentatif des modèles numériques dont il émane. L'écart à la mesure est, en moyenne et jusqu'à 3 GHz, de 7,5 % pour la résistance et 5,1 % pour l'inductance équivalente. Nous concluons cette étude en précisant qu'il s'agit là d'un résultat très positif. Un modèle électrique d'une grande souplesse est, en effet, proposé au concepteur. Il est propice à l'optimisation et conduit à des résultats tout à fait comparables à ceux donnés par des outils beaucoup plus complexes.

2. Perspectives

Si l'ossature globale du processus de modélisation est à présent bien établie, ce dernier est encore loin d'être finalisé et requiert à présent une indispensable phase d'affinage. De nombreux approfondissements seront nécessaires dans chacun des thèmes que nous avons effleurés et certains ont d'ailleurs été évoqués à la fin de chaque chapitre. Parmi les pistes de recherche s'offrant à nous, la trace la plus marquée semble se diriger vers l'intégration dans le simulateur des effets capacitifs. C'est en effet l'omission de ces phénomènes qui limite, aujourd'hui, la précision du modèle final proposé. Une fois cette étape réalisée, le circuit électrique équivalent sera considérablement étendu par rapport à ce que fournit actuellement le simulateur, comme le montre la Figure 1. Il modélisera en particulier les couplages à la masse et décrira la résonance du composant. D'un point de vue théorique, la résolution de l'équation intégrale électrique demande l'expression des fonctions de Green associées [2], pour des cellules élémentaires disposées sur un substrat stratifié. Le traitement numérique en lui-même peut être réalisé en ayant recours à une méthode des moments (MoM) et ne devrait pas impacter significativement les temps de calculs. En effet, les couplages capacitifs sont liés aux charges surfaciques. Par conséquent, seul un maillage supplémentaire à la surface des conducteurs est nécessaire, ce qui est évidemment beaucoup plus léger numériquement qu'un maillage volumique.

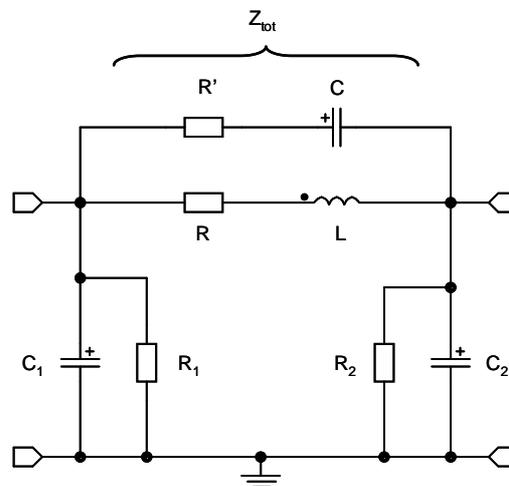


Figure 1 : Modèle complet intégrant les effets inductifs (PEEC) et les effets capacitifs (MoM).

Il est important de remarquer que le couplage capacitif mutuel entre le pont et l'enroulement spiralé ne peut en aucun cas être négligé, les surfaces en vis-à-vis étant importantes. Ainsi, les conducteurs rectilignes que sont le pont et les lignes d'accès apparaîtront à terme dans la matrice admittance réduite du modèle complet. Quoique que cela ne soit pas primordial, une certaine cohérence descriptive impose que nous prenions également en compte le couplage mutuel magnétique entre ces pistes et les boucles concentriques qui représentent l'enroulement spiralé et le plan de masse. Deux types de décomposition devront alors cohabiter, l'une impliquant des anneaux circulaires de section rectangulaire et la seconde des barreaux rectilignes. Ceci revient à développer

une méthode PEEC mixte, donc à déterminer une expression analytique, exacte ou approchée, de l'inductance mutuelle entre un barreau et un anneau.

L'implémentation des effets capacitifs ne sera pas sans conséquence sur la procédure d'extraction du modèle paramétré, assurément. Celle-ci devra, d'une part, faire l'objet d'une généralisation puisque qu'il y aura alors trois dipôles à traiter, correspondant à chacune des branches du circuit équivalent en π , et non plus un seul. D'autre part, si l'on se focalise sur l'impédance de transmission $Z_{tot}(f) = R_{tot}(f) + j \cdot X_{tot}(f)$ qui fut au centre de ce mémoire, la première des tâches à réaliser portera de toute évidence sur l'identification des composants $\{R, L, R', C\}$. Il s'agit là d'un problème *a priori* fort complexe car tous ces paramètres sont – effectivement ou potentiellement – variables avec la fréquence, ce qui exclut une extraction par optimisation. La méthode PEEC néglige par construction les couplages électriques. Elle nous donne par conséquent uniquement accès aux paramètres $R(f)$ et $L(f)$. La simulation globale (PEEC+MoM) retourne, quant à elle, les grandeurs globales $R_{tot}(f)$ et $X_{tot}(f)$. Ces deux simulations permettent donc, conjointement, une détermination univoque des variables $R'(f)$ et $C(f)$, comme le soulignent les équations (2.1) et (2.2). La fréquence f a été omise dans les expressions ci-dessous, afin de ne pas alourdir outre mesure la notation. Remarquons que cette simple astuce évite le recours à l'optimisation, profitant des possibilités de découplage des phénomènes physiques offertes par la simulation numérique. Elle lève, de fait, toute ambiguïté quant à la définition des paramètres électriques.

$$R' = \frac{R_{tot} \cdot (R^2 + L^2 \omega^2) - R \cdot (R_{tot}^2 + X_{tot}^2)}{(R_{tot} - R)^2 + (X_{tot} - L\omega)^2} \quad (2.1)$$

$$C = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{(R_{tot} - R)^2 + (X_{tot} - L\omega)^2}{L\omega \cdot (R_{tot}^2 + X_{tot}^2) - X_{tot} \cdot (R^2 + L^2 \omega^2)} \quad (2.2)$$

La résistance R' a été placée dans le modèle afin de garantir la généralité de l'extraction. Cependant, notons qu'à de rares exceptions près [3], la grande majorité des modèles compacts ne la prennent pas en compte. Cette résistance peut-elle être négligée ? De plus, comment lier la capacité C à la géométrie, c'est-à-dire quelle base comportementale utiliser ? Celle-ci peut-elle être bâtie à partir de considérations physiques ou doit-on recourir à une base de projection mathématique ? Dans ce dernier cas, les fonctions d'interpolation conventionnelles sont-elles satisfaisantes ou doit-on impliquer une base plus exotique, comme par exemple la base de Turblington [4] ? Tant de questions en suspens et si peu de temps...

Références

- [1] **A. Einstein, L. Infeld**, "Les quanta", *L'évolution des idées en physique*, Paris : Editions Flammarion, Chapitre 4, 1983, pp. 276.
- [2] **L. Fuhua, L. Zhengfan**, "A Novel Method of Si Chip Integrated Spiral Inductors for RF IC's", *Chinese Journal of Electronics*, Vol. 12, n° 3, July 2003, pp. 483 – 486.
- [3] **J. del Pino, J. Garcia, B. Gonzalez, J. Sendra, A. Hernandez, A. Garcia-Alonso, A. Nunez**, "Empirical Model of the Metal Losses in Integrated Inductors", *Proceedings of the International Society for Optical Engineering*, Vol. 5117, 2003, pp. 461 – 469.
- [4] **S. Pan, L. Li, W. Yin, M. Leong**, "Electrical Characteristics and Behavioral Model of Spiral Inductors on GaAs Substrate", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 16, n° 4, 2002, pp. 443 – 455.

Annexe :
Résistance d'un ruban conducteur

"Pour expliquer un brin de paille, il faut démonter tout l'univers"

Rémy de Gourmont, Le chemin de velours

1. Introduction

Supposons un ruban de largeur W , d'épaisseur infinitésimale dT et de longueur $L \gg W$ (cf. Figure 1). Cette barre présente une conductivité σ , l'espace est considéré homogène et isotrope de perméabilité μ et de permittivité ε . Nous nous proposons ici de déterminer la résistance de ce ruban pour un signal d'excitation harmonique de pulsation ω – se propageant dans la direction y – pour en déduire ensuite le comportement fréquentiel. La résolution de ce problème scolastique d'électromagnétisme requiert plusieurs étapes :

- Etablissement de l'équation régissant le champ électrique dans le conducteur.
- Résolution de cette équation, ce qui nous donne l'amplitude du champ.
- Expression analytique de la résistance équivalente d'après le calcul de la puissance électromagnétique fournie au conducteur et de l'intensité du courant le parcourant.

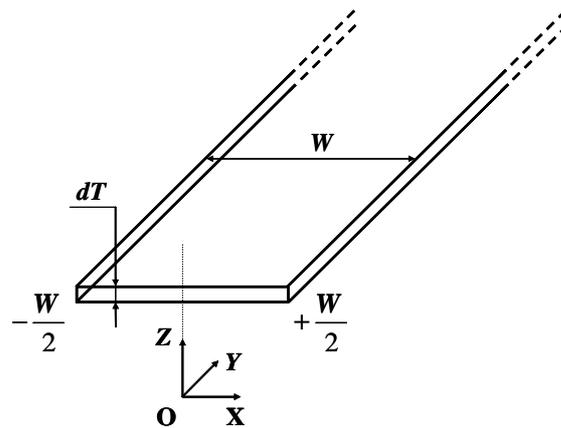


Figure 1 : Caractéristiques géométriques du ruban.

2. L'équation de diffusion

Le champ électromagnétique en un point M quelconque du conducteur est défini par un couple de vecteurs : le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$. Ces grandeurs sont liées par les équations de Maxwell, qui dans notre cas prennent la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(M, t) = \vec{0} \qquad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M, t) = \mu \left[\vec{J}(M, t) + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right] \qquad (2.2)$$

où $\rho(M,t)$ est la densité volumique de charge et $\vec{J}(M,t)$ la densité de courant au point M . Les problèmes impliquant des équations aux dérivées partielles sont en général très complexes et il existe bien peu de cas où ils admettent une solution analytique exacte. On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), explicitée en détail au chapitre 3. En ce qui nous concerne, seules nous intéressent les deux hypothèses suivantes, à savoir : le terme de déplacement négligeable d'une part et donc la neutralité électrique volumique dans le conducteur, la loi d'Ohm locale vérifiée d'autre part. Dans ces conditions, on obtient une équation de diffusion valable en tout point M du conducteur :

$$\Delta \vec{E}(M,t) - \mu\sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.3)$$

Les conditions d'excitation imposent quant à elles :

$$\vec{E}(M,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E(M,t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Le ruban est supposé suffisamment long pour omettre les effets de "bord" ($L \gg W$) et l'ARQS nous autorise à négliger le temps de propagation du signal le long de la ligne. L'étude peut alors être limitée au plan (xOz). De plus, le ruban étant d'épaisseur infinitésimale, le champ électrique ne dépend dans la section de conduction que de la variable x . Il s'ensuit en conséquence l'équation scalaire suivante :

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \mu\sigma \cdot \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

Il s'agit d'une équation couramment rencontrée en physique – en thermique par exemple – et l'on montre qu'une solution non triviale et non évanescence doit être de forme sinusoïdale. Ainsi, la résolution de l'équation différentielle passe par l'identification d'une amplitude $\hat{E}(x)$ et d'un terme de phase $\Phi(x)$:

$$E(x,t) = \hat{E}(x) \cdot \cos[\omega t + \Phi(x)] \quad (2.6)$$

Il est parfois surprenant en mathématiques de remarquer que la résolution d'un problème plus général est parfois plus simple que la résolution du problème particulier. On peut prendre l'exemple du théorème des résidus, qui calcule dans le domaine complexe une intégrale afin d'en déduire la solution réelle. Nous allons, afin de faciliter l'analyse, avoir recours au formalisme

cissoïdal. Celui-ci, en scindant explicitement dans les calculs les composantes spatiales et temporelles de l'expression du champ, simplifie considérablement la résolution du problème. On pose :

$$\underline{E}(x,t) = \hat{E}(x) \cdot e^{j[\omega t + \Phi(x)]} \quad (2.7)$$

De par la linéarité de l'opération de différentiation, on démontre que l'équation ci-dessous est équivalente à l'équation initiale (2.5).

$$\frac{\partial^2 \underline{E}(x,t)}{\partial x^2} - \mu\sigma \cdot \frac{\partial \underline{E}(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

La solution est ensuite simplement déduite en notant que :

$$E(x,t) = \Re e[\underline{E}(x,t)] \quad (2.9)$$

L'équation (2.8) peut encore être simplifiée en séparant explicitement dans l'expression du champ complexe $\underline{E}(x,t)$ les composantes spatiale et temporelle :

$$\hat{\underline{E}}(x) = \hat{E}(x) \cdot e^{j\Phi(x)} \quad \Rightarrow \quad \underline{E}(x,t) = \hat{\underline{E}}(x) \cdot e^{j\omega t} \quad (2.10)$$

On passe alors d'une équation différentielle hétérogène, au sens où elle fait intervenir deux opérateurs, à une équation homogène :

$$\frac{\partial^2 \hat{\underline{E}}(x)}{\partial x^2} - j\mu\sigma\omega \cdot \hat{\underline{E}}(x) = 0 \quad (2.11)$$

Cette équation admet une solution générale de la forme :

$$\hat{\underline{E}}(x) = A_+ e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} + A_- e^{-(1+j)\frac{x}{\delta}} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (2.12)$$

La grandeur δ , homogène à une distance, est appelée profondeur de peau. Dans la mesure où elle pondère la variable spatiale x dans l'expression du champ électrique, elle quantifie la pénétration de celui-ci dans le ruban. Les constantes A_+ et A_- sont déterminées d'après les conditions aux limites du conducteur, qui imposent une distribution symétrique du champ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{W}{2}} \hat{E}(x) = \hat{E}\left(\frac{W}{2}\right) \cdot e^{j\Phi\left(\frac{W}{2}\right)} = \underline{E}_0 \quad (2.13)$$

Cela nous permet de déduire la solution particulière de notre problème :

$$\hat{E}(x) = \underline{E}_0 \cdot \frac{\cosh\left[(1+j) \cdot \frac{x}{\delta}\right]}{\cosh\left[(1+j) \cdot \frac{W}{2\delta}\right]} \quad (2.14)$$

Enfin, d'après la définition de $\hat{E}(x)$ donnée par la relation (2.10), la composante spatiale du champ électrique a pour expression :

$$\hat{E}(x) = E_0 \cdot \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{2x}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{W}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{W}{\delta}\right)}} \quad \text{avec} \quad E_0 = \hat{E}\left(\frac{W}{2}\right) \quad (2.15)$$

Notons que si l'argument $\Phi(x)$ est nécessaire à la détermination complète du champ électrique, sa connaissance n'est en revanche pas requise lors du calcul de la résistance équivalente comme nous allons le voir à présent.

3. Calcul de la résistance équivalente

Quoique conceptuellement très simple, le calcul de la résistance du ruban conducteur est quelque peu fastidieux et remplit quelques pages. Par souci de clarté, nous nous contenterons ici d'en donner les grandes lignes en insistant sur la méthode employée. Ainsi, la puissance électromagnétique instantanée fournie, au temps t , aux charges contenues dans un élément de volume infinitésimal autour de la position x a-t-elle pour expression :

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \vec{E} \cdot \vec{J} \\ p(x,t) &= \sigma \cdot \|\vec{E}\| = \sigma \cdot E(x,t)^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Soit τ la période du signal d'excitation et $\bar{p}(x)$ la puissance électromagnétique moyenne fournie aux charges à la position x :

$$\bar{p}(x) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} p(x,t) \cdot dt = \frac{\sigma \cdot \hat{E}^2(x)}{2} \quad (3.2)$$

La puissance électromagnétique moyenne \bar{P} fournie au ruban de conducteur est donnée quant à elle par la relation :

$$\bar{P} = dT \cdot \int_0^L \int_{-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} \bar{p}(x) \cdot dx dy = \frac{\sigma L dT}{2} \cdot \int_{-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} \hat{E}^2(x) \cdot dx \quad (3.3)$$

Il faut remarquer que l'ordre dans lequel on réalise les étapes de calcul (3.2) et (3.3) importe peu, l'intégration étant une opération commutative. Néanmoins en réalisant dans un premier temps la moyenne temporelle, on fait disparaître le terme de phase $\Phi(x)$ ce qui simplifie le problème. On obtient finalement :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{W}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{W}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{W}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{W}{\delta}\right)} \cdot \sigma E_0^2 \delta L (dT) \quad (3.4)$$

On s'intéresse à présent à l'intensité du courant $I(t)$ circulant dans le ruban. Soit $J(x,t)$ la densité de courant à l'abscisse x et au temps t . Dans le cadre de l'ARQS :

$$J(x,t) = \sigma \cdot E(x,t) \quad (3.5)$$

Il vient immédiatement :

$$I(t) = dT \cdot \int_{-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} J(x,t) \cdot dx = \sigma \cdot dT \cdot \int_{-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} E(x,t) \cdot dx \quad (3.6)$$

Une fois de plus, les calculs se trouvent être grandement simplifiés si l'on a recours au formalisme cissoïdal. On introduit en (3.7) la grandeur complexe $\underline{I}(t)$ d'après $\underline{E}(x,t)$. Ceci nous permet de calculer d'après son module, explicité en (3.8), la valeur moyenne du carré du courant $I(t)$, notée $\overline{I^2}$, sans avoir à faire intervenir explicitement le terme $\Phi(x)$.

$$\underline{I}(t) = \sigma \cdot dT \cdot \int_{-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} \underline{E}(x,t) \cdot dx \quad (3.7)$$

$$|\underline{I}(t)| = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sinh^2\left(\frac{W}{\delta}\right) + \sin^2\left(\frac{W}{\delta}\right)}}{\cosh\left(\frac{W}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{W}{\delta}\right)} \cdot \sigma E_0 \delta (dT) \quad (3.8)$$

On démontre, en effet, que $\overline{I^2}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{I^2} &= \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^\tau I^2(t) \cdot dt = \frac{|\underline{I}(t)|^2}{2} \\ \overline{I^2} &= \frac{\sinh^2\left(\frac{W}{\delta}\right) + \sin^2\left(\frac{W}{\delta}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{W}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{W}{\delta}\right)\right]^2} \cdot (\sigma E_0 \delta dT)^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

On en déduit la résistance équivalente R_{eq} du ruban de largeur L et d'épaisseur infinitésimale dT :

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{\overline{P}}{I^2} \\ R_{eq} &= \frac{L}{2\sigma \cdot \delta dT} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{W}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{W}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{W}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{W}{\delta}\right)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si l'on pose $\theta = \frac{W}{\delta}$, l'expression de la résistance équivalente devient :

$$R_{eq} = R_{dc} \cdot \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sinh(\theta) + \sin(\theta)}{\cosh(\theta) - \cos(\theta)} \quad \text{où} \quad R_{dc} = \frac{L}{\sigma W dT} \quad (3.11)$$

Il est surprenant de constater à quel point la fonction R_{eq} est concise en fin de compte, ce que ne laissait pas présager les développements intermédiaires. L'étude du comportement à l'infini de cette fonction nous conduit à faire la même conclusion que lors de l'analyse phénoménologique réalisée au chapitre 2. Ainsi, dans le cas d'un effet de peau unidimensionnel (ce qui suppose une section de conduction d'épaisseur infinitésimale), la résistance d'un ruban conducteur présente, au premier ordre, une dépendance à la fréquence en \sqrt{f} .

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} R_{eq} = R_{dc} \cdot \frac{\theta}{2}$$
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} R_{eq} = R_{dc} \cdot \frac{W}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \propto \sqrt{\omega}$$
(3.12)

Caractérisation et modélisation prédictive d'inductances spiralées intégrées

Une bibliothèque de modèles décrivant, dans la plage des Radio-Fréquences (RF), le comportement électrique de composants passifs intégrés est aujourd'hui essentielle à la simulation et l'optimisation de circuits complexes. Nous nous sommes, pour notre part, intéressés à la modélisation jusqu'à 6 GHz des inductances spiralées déposées sur un substrat en verre. Le travail présenté dans ce mémoire s'organise ainsi autour de trois axes complémentaires. Le premier concerne la mise en place d'un banc de caractérisation hyperfréquence opérant de 30 kHz à 6 GHz. La métrologie RF requiert, en particulier, la correction des erreurs introduites par le motif de mesure, dont la réponse électrique est non négligeable. Diverses techniques, dites de compensation, ont été étudiées afin d'identifier une méthode réalisant un bon compromis entre précision et nombre de structures de test impliquées. Le travail de modélisation en lui-même porte sur la synthèse de modèles électriques "paramétrés", permettant de prédire rapidement les caractéristiques d'une inductance, à partir des seules spécifications géométriques et technologiques de celle-ci. Cette adaptabilité implique que les éléments du circuit équivalent soient explicitement reliés aux grandeurs définissant le composant étudié, ce qui impose un lien intime à la physique sous-jacente. D'où l'implémentation d'un outil de simulation numérique, basé sur la méthode PEEC, dans le but d'extraire un modèle inductif en transmission de l'inductance. Cette méthode, particulièrement adaptée aux structures planaires, a été appliquée au cas des composants à symétrie quasi axiale, ce qui donne lieu à un simulateur efficace autorisant la prise en compte simple d'un plan de masse coplanaire. Enfin, nous avons établi une procédure de génération d'un modèle comportemental à partir du modèle physique, c'est-à-dire l'obtention d'un modèle analytique paramétré par la géométrie d'après un ensemble de simulations. La procédure comprend l'extraction de variables descriptives équivalentes à la solution numérique calculée, ainsi que la corrélation de celles-ci à la géométrie qui fait appel, entre autres, à la théorie des plans d'expériences.

Mots Clés : analyse vectorielle sous pointes, calibrage, méthodes d'épluchage, Radio-Fréquences, inductances spiralées intégrées, méthode PEEC, modélisation comportementale, plans d'expériences.

Characterization and predictive modeling of integrated spiral inductors

A library of models describing the electrical behavior of integrated passive components in the radio-frequency range is essential today for the simulation and optimization of complex circuits. As for us, we were interested in the modeling up to 6 GHz of spiral inductors manufactured on a glassy substrate. The work presented in this thesis is organized around three complementary axes. The first one concerns the development of a hyper frequency measurement bench working from 30 kHz up to 6 GHz. The RF metrology specifically requires the correction of the errors introduced by the measurement dummy structures whose electrical responses are not negligible. Several techniques, known as de-embedding techniques, have been studied in order to identify a method that carries out a compromise between accuracy and the number of test structures implied. The modeling work, by itself, deals with the synthesis of electrical parameterized models, enabling to rapidly predict the characteristics of an inductor, only from the geometrical and technological specifications of the latter. This adaptability implies that the elements of the equivalent circuit be explicitly related to the variables defining the component under study, what imposes a close link to the underlying physical phenomena. Hence, a numerical simulation tool, based on the PEEC method, has been implemented with the aim of extracting an inductive transmission model of the inductor. This method has been extended to the case of components presenting a quasi-circular symmetry, what gives rise to an efficient simulator allowing taking into account, in a simple manner, a coplanar ground plane. Lastly, we established a procedure in order to generate a behavioral model from the physical model, that is to obtain an analytical model parameterized as a function of geometry. The procedure includes the extraction of descriptive variables equivalent to the numerical solution calculated, as well as their correlation to the geometry that, among others, resorted to the design of experiments theory.

Keywords : vector network analysis, calibration, de-embedding methods, Radio-Frequencies, integrated spiral inductor, PEEC method, behavioral modeling, design of experiments.